

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren, fortgeführt  
durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E.  
Wiedemann, P. Drude, W. Wien, M. Planck

6. Folge, Band 4

Der ganzen Reihe 439. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,  
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,  
R. SEELIGER, A. SOMMERFELD, W. WEIZEL

Herausgegeben von

E. GRÜNEISEN †  
Marburg/L.

F. MÖGLICH  
Berlin

Mit 168 Abbildungen im Text



1 9 4 9

---

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Physics Library

QC

1

A613



Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74, für den Anzeigenteil: Kurt Klimmer (Arbeitsgemeinschaft medizinischer Verlage G. m. b. H.), Berlin C 2, Neue Grünstraße 18, Ruf: 42 30 97,  
Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstraße 18 B,  
Fernruf: 63 105, 63 781

Printed in Germany

(1) Paul Dünhaupt, Köthen L 49

Lizenz-Nr. 410 / G. N. 446



A

6. F

**Res**

I  
trach  
Frec  
und  
gun  
eine  
Glei  
Sie  
Ger  
Stör  
die

I  
Ano  
wel  
ist.  
der

Wel  
weil  
Abb  
Am

( $K_n$ )  
Sch  
Bez

gust  
Weg  
vor



# ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE \* BAND 4, HEFT 1-2 \* 1948

## *Resonanzkurven von erzwungenen Schwingungen, erregt durch Störungen mit frequenzabhängiger Amplitude<sup>1)</sup>*

Von Max Püsler

(Mit 11 Abbildungen)

### Inhaltsübersicht

Es wird die erzwungene Bewegung eines (mechanischen) Schwingensystems betrachtet, auf das eine Störung wirkt, deren Amplitude einer Potenz  $n$  der erregenden Frequenz  $\omega$  proportional ist. Insbesondere wird zunächst für die Fälle  $n = 0, 1$  und  $2$  und später für  $n = 3, 4$  der Verlauf der Resonanzkurven  $\sigma_n$  der Schwingung mit der Federkonstanten als Parameter diskutiert. Es ergibt sich hierfür eine Kurvenschar, die in der  $\sigma_n$ - $\omega$ -Ebene einen gewissen Bereich bedeckt. Die Gleichung der ihn abgrenzenden Einhüllenden der Resonanzkurven wird ermittelt. Sie erweist sich in einem doppellogarithmischen Koordinatensystem stets als eine Gerade, deren Neigung bei der hier angenommenen Frequenzabhängigkeit der Stör-Amplitude durch  $n - 1$  gegeben ist. Einige ergänzende Bemerkungen schließen die Betrachtungen ab.

Der zeitliche Verlauf gewisser Systemgrößen in bestimmten schwingungsfähigen Anordnungen erweist sich in einer Reihe von Fällen als eine erzwungene Bewegung, welche durch eine Störkraft  $F(t)$  bedingt wird, deren Amplitude frequenzabhängig ist. Bei der (praktisch wohl immer erfüllten) Annahme einer periodischen Änderung der Störung mit der Zeit, ist demnach jene von der Form

$$F(t) = A(\omega) \cdot e^{j\omega t} \quad (j = \sqrt{-1}). \quad (1)$$

Welchen Ausdruck  $A(\omega)$  im einzelnen darstellt, hängt naturgemäß von dem jeweils vorliegenden Problem ab: die Anwendungen führen im allgemeinen zu einer Abhängigkeit, die proportional einer Potenz der Störfrequenz ist, so daß also die Amplitude der erzwungenen Kraft durch

$$A(\omega) = K_n \cdot \omega^n \quad (2)$$

( $K_n = \text{const}$ ) gegeben ist. Betrachtet man etwa einen einläufigen (mechanischen<sup>2)</sup>) Schwinger  $x_n(t)$ , so ist seine Bewegungsgleichung bei Verwendung der üblichen Bezeichnungen ( $m$  = Schwingermasse,  $c$  = Rückstell- bzw. Federkonstante,

<sup>1)</sup> Das am 10. Februar 1944 abgeschlossene Manuskript dieser Arbeit wurde am 13. August 1944 der Schriftleitung der „Z. techn. Physik“ zwecks Veröffentlichung eingereicht. Wegen der damals herrschenden Zeitumstände konnte die Publikation nicht mehr erfolgen.

<sup>2)</sup> Durch Anwendung eines bekannten Analogie-Theorems kann man gegebenenfalls vorliegende Schwingensysteme elektrischer Natur in mechanische überführen und umgekehrt.



vorganges — für den stationären Zustand die geläufige Form besitzt:

$$x_n(t) = \bar{x}_n(\omega) \cdot \varphi(t) = \frac{k_n \omega^n \cdot e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\delta\omega} \quad (11)$$

$$= \frac{k_n \omega^n \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \quad (12)$$

in der  $\varphi$  ein Winkel ist, welcher der zwischen  $x_n$  und der erregenden Störung herrschenden Phasenverschiebung Rechnung trägt. Durch Abspalten des Zeitfaktors  $\varphi(t)$  erhält man die erzwungene Schwingeramplitude  $\bar{x}_n(\omega)$  und gelangt von dieser zu der gesuchten Gleichung der Resonanzkurve  $\sigma_n$ , indem man  $\bar{x}_n(\omega)$  auf  $K_n$  bezieht. Somit ergibt sich

$$\sigma_n(\omega, c) = \frac{\bar{x}_n(\omega)}{K_n} = \frac{\omega^n}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + 4\delta^2 m^2 \omega^2}} \quad (13)$$

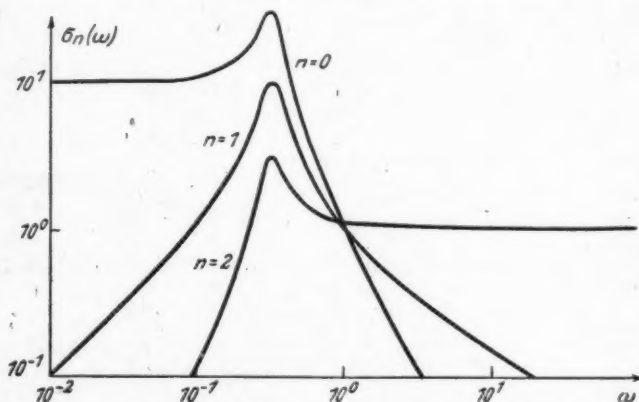


Abb. 1. Verlauf der Resonanzkurven  $\sigma_n(\omega)$  der erzwungenen Bewegung eines Schwingensystems, das unter dem Einfluß einer Störung steht, welche eine von der Störfrequenz  $\omega$  abhängige Amplitude  $A(\omega) \sim \omega^n$  besitzt. ( $n = 0, 1, 2$ )

Der Verlauf der  $\sigma_n$  ist wegen des Zählers  $\omega^n$  naturgemäß für die drei fraglichen  $n$ -Werte bereits bei festen Schwingparametern  $m$ ,  $\delta$  und  $c$  verschieden. Aus (13) läßt sich darüber vorerst folgendes ablesen: die Resonanzkurven beginnen ( $\omega = 0$ ) im Falle  $n = 0$  bei einem dem Parameter  $c$  umgekehrt proportionalen Wert, in den beiden anderen Fällen bei Null, durchlaufen dann einen Extremwert (der sich als Maximum erweist) und streben für sehr große Werte von  $\omega$  gegen Null mit Ausnahme des Falles  $n = 2$ , in welchem  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma_2(\omega, c) \rightarrow \frac{1}{m}$  geht. Diese Verhältnisse stellt Abb. 1 dar, in der die  $\sigma_n$  eines durch  $m = 1$ ,  $\delta = \frac{1}{20}$ ,  $c = 0,1$  charakterisierten Schwingensystems wiedergegeben sind.

Um nun — entsprechend der gestellten Aufgabe — den Einfluß einer Variation der Systemkonstanten  $c$  auf den Verlauf der  $\sigma_n$  zu ermitteln, ist es insbesondere erforderlich, die Abhängigkeit der Resonanzlage  $\Omega_n$  und des Betrages des Schwin-

gungsmaximum  $\Sigma_n$  von diesem Parameter zu ermitteln. Erstere ist in bekannter Weise bestimmt durch:

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\omega^n}{\sqrt{(c - m \omega^2)^2 + 4 \delta^2 m^2 \omega^2}} \right\} = 0, \quad (14)$$

welche Beziehung nach Ausrechnung zu folgender biquadratischen Bestimmungs-  
gleichung für  $\Omega_n$  führt:

$$(n-2)\Omega_n^4 + 2(n-1)(2\delta^2 - \omega_0^2)\Omega_n^2 + n\omega_0^4 = 0. \quad (15)$$

Für die hier insbesondere zur Diskussion stehenden Fälle sagt die Lösung von (15) aus, daß das Schwingungsmaximum auftritt

im Fall:	an der Stelle:	
$n = 0$	$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2m\delta^2}{c}} < \omega_0$	(16)
$n = 1$	$\Omega_1 = \omega_0$	(17)
$n = 2$	$\Omega_2 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{2m\delta^2}{c}}} > \omega_0$	(18)

Es liegt also

$\Omega_0$	stets	{	unterhalb	}	der jeweiligen natürlichen Eigenfrequenz $\omega_0$ .
$\Omega_1$			bei		
$\Omega_2$			oberhalb		

welche mit größer werdendem  $c$  selbst wächst. Für hinreichend große Beträge von  $c$  sind die relativen Abweichungen von  $\Omega_0$  und  $\Omega_2$  von  $\Omega_1 = \omega_0$  nach „oben“ bzw. „unten“ gleich groß, wie aus den Näherungen

$$\Omega_0 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{m\delta^2}{c}\right) \quad (19)$$

$$\Omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{m\delta^2}{c}\right) \quad (20)$$

hervorgeht, durch die sich (16) und (18) unter dieser Voraussetzung ersetzen lassen. Nach den beiden letzten Formeln liegt das Schwingungsmaximum um so weniger von der Stelle der natürlichen Eigenfrequenz  $\omega_0$  entfernt, je größer  $c$ , also die Rückstellkraft ist. In welchem Maße  $\Omega_0$  bzw.  $\Omega_2$  sich dabei  $\omega_0$  nähern, zeigt der rechte Teil der Abb. 2, in welcher die Kurven  $\frac{\Omega_n(c)}{\delta} = \Omega'_n(c)$  eingezeichnet sind. Als Abszisse wurde dort  $c$  als Vielfaches von  $\delta^2$  in der Form

$$c = \mu^2 \delta^2 \quad (21)$$

aufgetragen. Dies führt nach (16) und (18) zu

$$\frac{\Omega_0}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu^2}{m} - 2} \quad (22)$$

$$\frac{\Omega_2}{\delta} = \frac{n^2}{m \sqrt{\frac{n^2}{m} - 2}}, \quad (23)$$

welche Funktionen in Abb. 2 (mit  $m = 1$ ) dargestellt sind. Während sich mit wachsendem  $c$  die drei Werte  $\Omega'_n$  ständig nähern, werden die Abweichungen  $\Omega'_0$  bzw.  $\Omega'_2$  von  $\omega_0$  mit kleiner werdendem  $c$  immer größer, um für

$$n^2 = 2m \quad (24)$$

d. i. nach (21) für den Wert

$$\bar{c} = 2m\delta^2 \quad (25)$$

ihre größten Werte anzunehmen. Dabei wird

$$\Omega'_0(\bar{c}) = 0 \quad (26)$$

$$\Omega'_2(\bar{c}) = \infty. \quad (27)$$

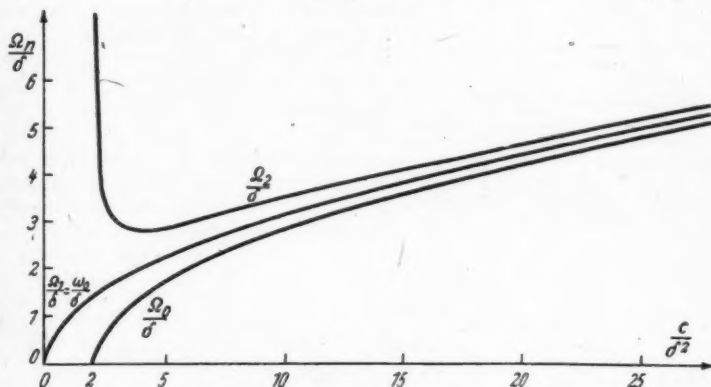


Abb. 2. Lage  $\frac{\Omega_n}{\delta} = \Omega'_n(c)$  der Maxima der Resonanzkurven  $\sigma_n(\omega, c)$  einer durch eine Störung mit frequenzabhängiger Amplitude  $A(\omega) \sim \omega^n$  erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit der Federzahl  $c$ . ( $n = 0, 1, 2$ )

Variiert also  $c$  zwischen den Grenzen

$$\bar{c} \leq c \leq \infty, \quad (28)$$

so läuft  $\Omega'_0$  von

$$0 \leq \Omega'_0 \leq \infty, \quad (29)$$

während  $\Omega'_2$  aus dem Unendlichen kommt, bis zu einem gewissen Wert  $\Omega_2^*$  fällt, um dann monoton wachsend wieder ins Unendliche zu gehen. Die Lage  $c'$  von  $\Omega_2^*$  ist offenbar bestimmt durch

$$\frac{\partial \Omega'_2}{\partial c} = 0 \quad (30)$$

und ergibt sich daraus zu

$$c' = 4m\delta^2. \quad (31)$$

Der eben erörterte Gang der  $\Omega'_n(c)$  ist in Abb. 2 dargestellt.

Wie aus (16) bzw. (18) erkennbar, tritt bei Systemen  $S(m, \delta, c)$ , deren

$$c < \bar{c} = 2m\delta^2 \quad (32)$$

ist, sofern sie mit konstanter Beschleunigungs- oder Wegamplitude angeregt werden, keine Resonanz mehr auf, obwohl das System durchaus noch Schwin-

gungsfähigkeit besitzen kann<sup>4)</sup>. Denn letztere ist bekanntlich dann vorhanden, wenn

$$\omega_0 > \delta \quad (33)$$

also das entsprechende

$$c = c_m > m \delta^2 \quad (34)$$

ist. Es sind also solche Systeme, deren Federkonstanten  $c$ , im Intervall

$$c_m \leq c_s < \bar{c} \quad (35)$$

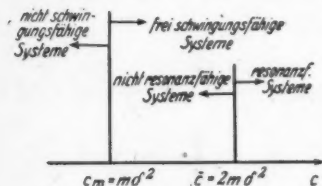


Abb. 3. Ein System  $S(m, \delta, c)$ , dessen Federkonstante  $c$  zwischen  $c_m < c \leq \bar{c}$  liegt, besitzt beim Einwirken einer Störung mit frequenzabhängiger Amplitude  $A(\omega) \sim \omega^n$  ( $n = 0$  oder  $2$ ) keine Resonanzfähigkeit, obwohl das System schwingungsfähig ist

liegen, wohl frei schwingungsfähig, sie weisen aber keine Resonanz mehr auf, vgl. Abb. 3. Dies gilt nicht für den Fall einer Anregung mit konstanter Wegamplitude [ $A(\omega) \sim \omega$ ], wie auch aus Abb. 2 hervorgeht, die erkennen läßt, daß dann für jeden Wert von  $c$  die erzwungene Schwingung eine Resonanzstelle besitzt.

Was den Betrag  $\Sigma_n$  des Resonanzmaximums betrifft, so ergibt sich dieser in üblicher Weise durch Einsetzen der Werte  $\Omega_n(16) \dots (18)$  in (13), was zu nachstehenden Ausdrücken führt:

$$\Sigma_0 = \frac{1}{2m\delta\sqrt{\frac{c}{m} - \delta^2}} \approx \frac{1}{2\delta\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{c}} \sim \sqrt{c^{-1}} \quad (36)$$

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2m\delta} = \frac{1}{2\delta\sqrt{m^2}} \sim \sqrt{c^0} \quad (37)$$

$$\Sigma_2 = \frac{c}{2m^2\delta\sqrt{\frac{c}{m} - \delta^2}} \approx \frac{1}{2\delta\sqrt{m^3}} \sqrt{c} \sim \sqrt{c} \quad (38)$$

Für die hier zu besprechende Frage sagen diese Formeln insbesondere aus, daß mit wachsendem  $c$  ( $c > \bar{c}$ ):  $\Sigma_0$  abnimmt,  $\Sigma_1$  konstant bleibt, während  $\Sigma_2$  zunimmt. Diese Verhältnisse lassen die in den Abb. 4–6 dargestellten Resonanzkurven deutlich erkennen, die einem Schwingssystem zukommen, dessen Masse  $m = 1$  gesetzt und dessen Dämpfung  $\delta = \frac{1}{20}$  gewählt wurde, während dem Parameter  $c$  die in den Abb. angeführten Werte erteilt wurden. Während in Abb. 5 der Betrag  $\Sigma_1$  gemäß (37) unabhängig von  $c$  stets konstant ist, verändern sich  $\Sigma_0$  und  $\Sigma_2$  monoton. In Abb. 6, die den „Fall“  $n = 2$  darstellt, ist auch deutlich erkennbar, wie mit abnehmendem  $c$  das Maximum ständig flacher wird und bei den hier gewählten Werten der Schwingungsdaten, entsprechend Gl. (32) für Werte von

$$c < \bar{c} = 2m\delta^2 = \frac{2}{400} = 0,005 \quad (39)$$

verschwindet. Die entsprechenden Verhältnisse für Resonanzkurven einer erzwungenen Schwingung angeregt durch eine frequenzunabhängige Amplitude ( $n = 0$ ), zeigt Abb. 7.

<sup>4)</sup> D. h. freie Schwingungen auszuführen in der Lage ist.

Man findet übrigens die Bedingung (32) auch aus den Gl. (36) und (38), wenn man fragt, für welches  $c = \bar{c}$  die Maxima  $\Sigma_0$  bzw.  $\Sigma_2$  gleich dem jeweiligen asymptotischen Wert sind, dem sich  $\sigma_0$  bzw.  $\sigma_2$  nähern. Es bedeutet dies offenbar nach der

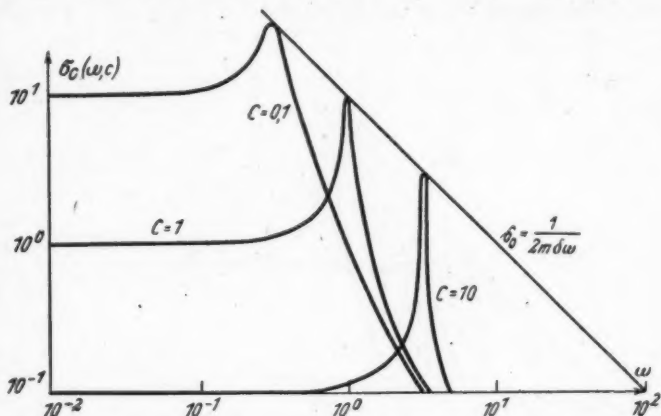


Abb. 4. Verlauf der Resonanzkurven  $\sigma_0(\omega, c)$  einer erzwungenen Schwingung, die durch eine Störung mit frequenzunabhängiger Amplitude  $A = \text{const}$  erregt wird, für verschiedene Werte des Parameters  $c$

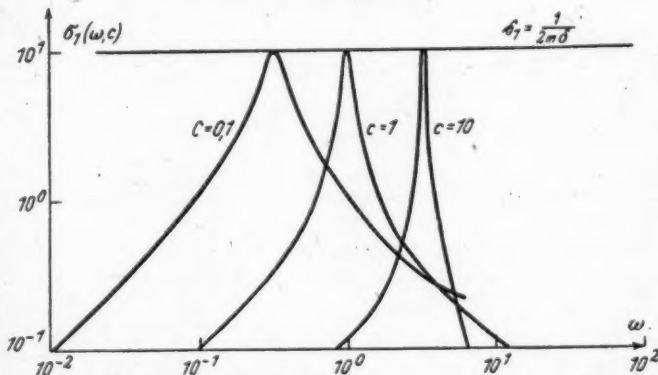


Abb. 5. Verlauf der Resonanzkurven  $\sigma_1(\omega, c)$  einer erzwungenen Schwingung, die durch eine Störung mit frequenzabhängiger Amplitude  $A(\omega) \sim \omega$  erregt wird, für verschiedene Werte des Parameters  $c$

in Anschluß an Gl. (13) gemachten Bemerkung über den allgemeinen Verlauf der  $\sigma_n$  das Bestehen der Beziehungen

$$\Sigma_0 = \frac{1}{2m\delta\sqrt{\frac{c}{m} - \delta^2}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma_0(c, \omega) = \frac{1}{c} \quad (40)$$



$$\Sigma_1 = \frac{c}{2m^2 \delta \sqrt{\frac{c}{m} - \delta^2}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma_1(c, \omega) = \frac{1}{m} \quad (41)$$

welche ersichtlich identisch sind und zu (32) führen. —

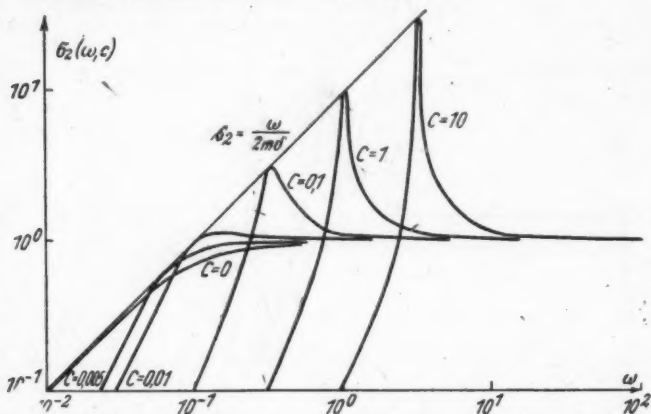


Abb. 6. Verlauf der Resonanzkurven  $\sigma_2(\omega, c)$  einer erzwungenen Schwingung, die durch eine Störung mit frequenzabhängiger Amplitude  $A(\omega) \sim \omega^2$  erregt wird, für verschiedene Werte des Parameters  $c$

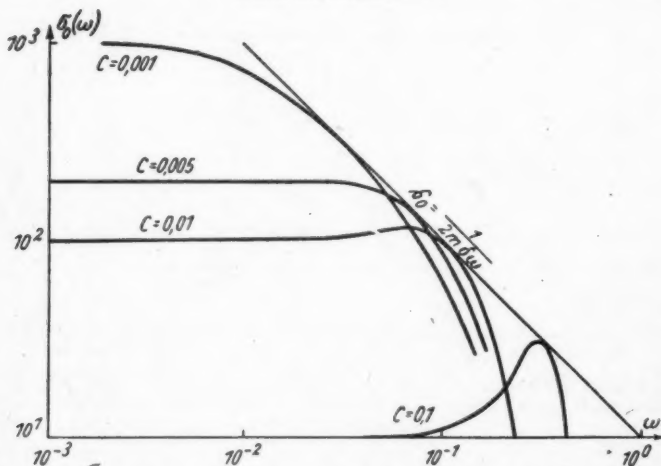


Abb. 7. Wie Abb. 4, jedoch für kleine Werte des Parameters  $c$ . Unterhalb des kritischen Wertes  $\bar{c} = 0,005$  hört für diesen Fall der Anregung ( $n = 0$ ) die Resonanzfähigkeit des Systems auf,  $\sigma_0$  besitzt dann kein Maximum mehr

Es fällt in den Abbildungen auf, daß sich in den hier besprochenen Fällen an die Resonanzkurven  $\sigma_n(\omega, c)$  stets eine gemeinsame Tangente legen läßt, die in



(41)

den Abb. 4 und 6 in dem dort verwendeten doppellogarithmischen Koordinatensystem verschieden geneigte Geraden sind, während sie in Abb. 5 eine Horizontale ist. Diese Tatsache wirft die Frage nach der Gleichung dieser Kurve, der Einhüllenden, auf. Nach bekannten Rechenregeln findet man die Enveloppe einer gegebenen Kurvenschar  $F(\omega, c)$  durch Elimination des Parameters  $c$  aus den Gleichungen

$$F(\omega, c) = \sigma_n - \frac{\omega^n}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + 4\delta^2 m^2 \omega^2}} = 0 \quad (42)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0. \quad (43) \quad \sigma_0(\omega, c)$$

Aus (43) folgt unschwer

$$c = m\omega^2, \quad (44)$$

was mit (42) kombiniert zu der Enveloppengleichung

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\omega^{n-1}}{2\delta m}. \quad (45)$$

führt. Für die hier betrachteten Sonderfälle ergeben sich also daraus:

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{2m\delta\omega} \quad (46)$$

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{2m\delta} \quad (47)$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{\omega}{2m\delta}, \quad (48)$$

d. h. bei einer Anregung mit einer Störampplitude  $A(\omega) \sim \omega$  hat die Einhüllende einen konstanten Wert, der dem Resonanzmaximum  $\Sigma_1$  entspricht, vgl. Gl. (37). Im Fall einer Anregung mit konstanter Beschleunigung,  $A(\omega) = \text{const}$ , ist die Hüllkurve eine Hyperbel, vgl. Abb. 8,

die in einem doppellogarithmischen Koordinatensystem in eine Gerade mit stumpfem Neigungswinkel übergeht, vgl. Abb. 4 und 7, während bei Anregung mit „konstanter Wegamplitude“,  $A(\omega) \sim \omega^2$ , die Kurvenschar eine Enveloppe besitzt, die in jedem linearen Koordinatensystem stets eine Gerade mit spitzem Neigungswinkel ist. Auch bei „höheren“ Anregungen ( $A(\omega) \sim \omega^n$ ,  $n \geq 3$ ) ist die Hüllkurve immer eine Gerade, wenn man die Darstellung in einem doppellogarithmischen Koordinatensystem vornimmt. Die Neigung ist bei der hier angenommenen Frequenzabhängigkeit (2) durch  $n-1$  gegeben.

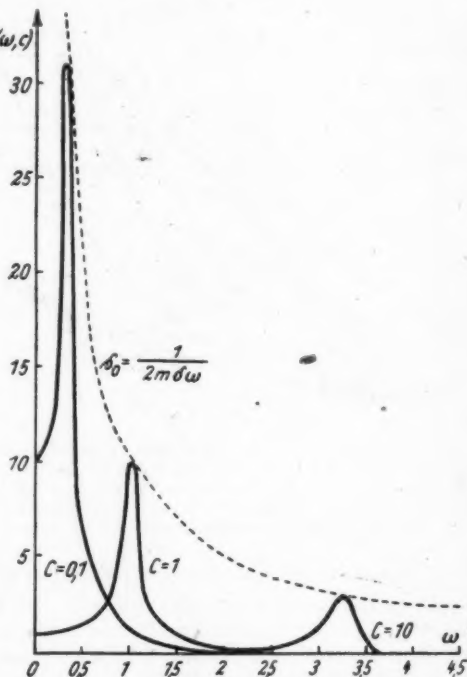


Abb. 8. Die Enveloppe  $\hat{\sigma}_0(\omega)$  der Resonanzkurvenschar  $\sigma_0(\omega, c)$  ist in einem kartesischen Koordinatensystem eine Hyperbel

Fragt man, an welcher Stelle  $\bar{\omega}$  die Enveloppe  $\hat{s}_n$  die Resonanzkurve  $\sigma_n(\omega, c)$  berührt, so findet man leicht aus

$$\sigma_n(\bar{\omega}, c) = \hat{s}_n(\bar{\omega}), \quad (49)$$

daß der Berührungspunkt an der Stelle

$$\bar{\omega} = \omega_0 \quad (50)$$

liegt. Es ist demnach die Einhüllende der geometrische Ort aller (relativen) erzwungenen Schwingungsamplituden für diejenige Störfrequenz, die der natürlichen

Eigenfrequenz des jeweilig vorliegenden Systems  $S(m, \delta, c)$  entspricht.

Wie sich die Resonanzkurven der Enveloppe nähern, ist aus Abb. 9 ersichtlich, in der die Kurven  $\sigma_2(\omega, c)$  für sehr kleine Werte des Parameters  $c$  dargestellt sind. Es ist in der Darstellung zu erkennen, daß der  $\sigma_2$ -Kurvenast, der (s. o.) im Nullpunkt beginnt, mit abnehmendem  $c$  zwischen dem Berührungspunkt mit der Enveloppe und seinem Anfang sich stets mehr an die Einhüllende anschmiegt, die schließlich für  $c = 0$  im Ursprung (dann ist  $\omega_0 = 0$ ) Tangente wird.

Da die numerischen Werte

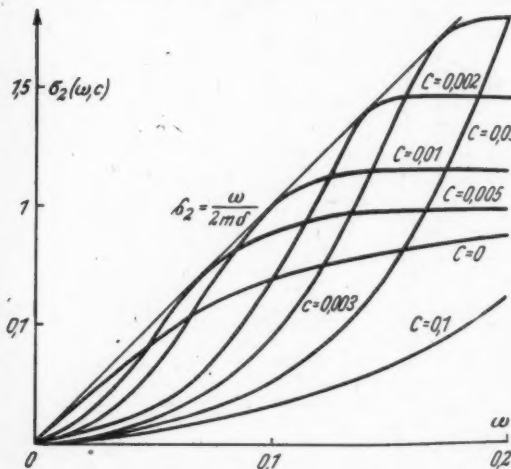


Abb. 9. Enveloppe  $\hat{s}_2(\omega)$  der Resonanzkurvenschar  $\sigma_2(\omega, c)$ , die eine Gerade ist und Verlauf einiger  $\sigma_2$ -Kurvenäste zwischen dem Ursprung und ihrem Berührungspunkt mit  $\hat{s}_2$ . Berührung findet statt, wenn die Störfrequenz  $\omega =$  der natürlichen Schwingereigenfrequenz  $\omega_0$  ist

der beiden festen Schwingparameter  $m$  und  $\delta$  die gleichen wie oben sind, ist der jeweilige Berührungspunkt durch  $\sqrt{c}$  gegeben. Daß die Systeme mit einem  $c \leq \delta^2 = 0,0025$  nicht mehr frei schwingungsfähig sind, ist im Zusammenhang mit dieser Betrachtung ohne Belang.

Folgende Bemerkungen mögen die vorstehenden Ausführungen ergänzen:

1. Aus der engen Beziehung

$$\sigma_2(\omega, c) = \omega \cdot \sigma_1(\omega, c) = \omega^2 \cdot \sigma_0(\omega, c), \quad (51)$$

die zwischen den  $\sigma_n$  besteht, lassen sich leicht weitere herleiten. So zeigt man etwa u. a. unschwer das Bestehen der Gleichungen

$$\sigma_2\left(\frac{c}{m\omega}, c\right) = \frac{c}{m} \cdot \sigma_0(\omega, c) \quad (52)$$

$$\sigma_2(\omega, c) = \frac{c}{m} \cdot \sigma_0\left(\frac{c}{m\omega}, c\right), \quad (53)$$

welche Beziehungen es z. B. gestatten, für einen festen  $c$ -Wert  $\sigma_0$  und  $\sigma_2$  in einem Diagramm gleichzeitig darzustellen. Dabei liegen allerdings die Verhältnisse nicht so günstig wie in dem Fall, wenn  $\delta$  als Parameter fungiert, da dieser bei den ent-

sprechenden Beziehungen bekanntlich nicht als Faktor auftritt, daher auch keine Maßstabänderung der Ordinatenachse erforderlich ist, die etwa bei Veranschaulichung der Gl. (52) und (53) notwendig wäre.

2. Die zwischen den  $\sigma_n$  herrschende Kopplung kann auch dazu dienen, jene und ebenfalls die  $x_n$  bzw.  $x_n(\omega)$  anders als bisher zu deuten. Letztere war bekanntlich die Amplitude der durch die Störung (1) in Verbindung mit (2) erzwungenen Schwingung  $x_n(t)$ . Diese verläuft nun mit einer Geschwindigkeit

$$v_n(t) = \bar{v}_n(\omega) \cdot \chi(t) = \frac{dx_n}{dt} \\ = \frac{k_n \omega^{n+1} \cdot e^{j(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\delta\omega} \quad (54)$$

deren Amplitude bis auf den Faktor  $\frac{k_{n+1}}{k_n}$  mit  $\bar{x}_{n+1}$  übereinstimmt. Definiert man nun eine Resonanzkurve der Geschwindigkeit von  $x_n(t)$  wie oben, so ergibt sich

$$(\dot{\sigma})_n = \frac{\bar{v}_n}{K_n} \\ = \omega \sigma_n = \sigma_{n+1} \quad (55)$$

Entsprechendes gilt für die „Beschleunigungs“-resonanzkurve des Vorganges  $x_n(t)$ :

$$(\ddot{\sigma})_n = \frac{b_n}{K_n} \\ = \omega^2 \sigma_n = \sigma_{n+2} \quad (56)$$

Demnach sind also

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma_0 \\ \sigma_1 &= (\dot{\sigma})_0 \\ \sigma_2 &= (\ddot{\sigma})_0 \end{aligned} \right\} \text{ die Resonanzkurven } \left\{ \begin{aligned} &\text{des Weges} \\ &\text{der Geschwindigkeit} \\ &\text{der Beschleunigung} \end{aligned} \right.$$

der erzwungenen Schwingung  $\chi_0(t)$  bei einer Anregung durch eine Störung mit konstanter (Beschleunigungs-)Amplitude  $A(\omega) \sim \omega^2 = \text{const.}$  Es stellen also die in den Abb. 4–6 dargestellten Kurvenscharen den gesamten Bewegungszustand (Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung) des zeitlichen Vorganges  $x_0(t)$  dar<sup>7)</sup>. Entsprechend sind  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  bzw.  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  die diesbezüglichen Größen bei Anregung mit  $A(\omega) \sim \omega$  bzw.  $A(\omega) \sim \omega^3$ . Es besitzen also die „Fälle“  $n = 0 \dots 4$  eine

<sup>7)</sup> Jeweils auf  $K_0$  normiert. \*

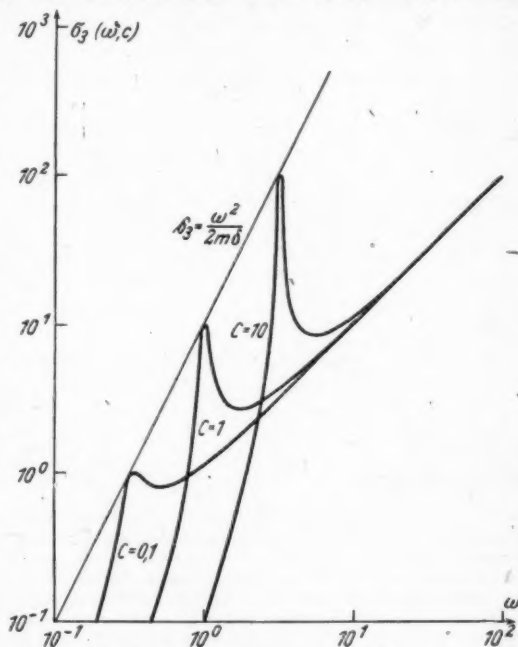


Abb. 10. Verlauf der Resonanzkurve  $\sigma_3(\omega, c)$  einer erzwungenen Schwingung, die durch eine Störung mit frequenzabhängiger Amplitude  $A(\omega) \sim \omega^3$  erregt wird, für verschiedene Werte des Parameters  $c$ . Gleichzeitig Geschwindigkeitsresonanzkurve  $(\dot{\sigma})_2$  bzw. Beschleunigungsresonanzkurve  $(\ddot{\sigma})_1$

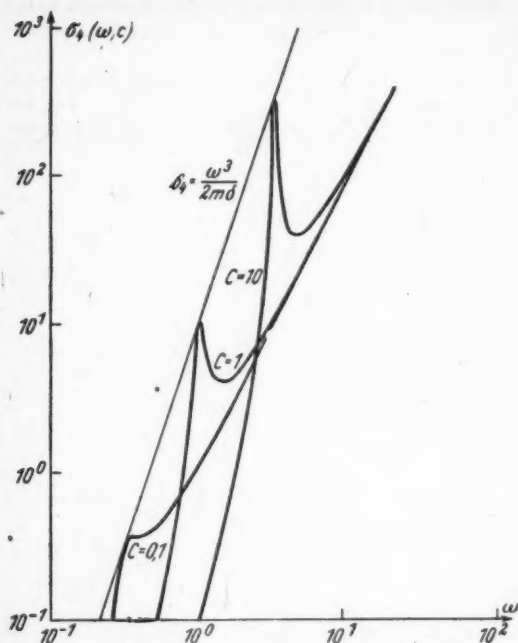


Abb. 11. Verlauf der Resonanzkurve  $\sigma_4(\omega, c)$  einer erzwungenen Schwingung, die durch eine Störung mit einer frequenzabhängigen Amplitude  $A(\omega) \sim \omega^4$  erregt wird, für verschiedene Werte des Parameters  $c$ . Gleichzeitig Geschwindigkeitsresonanzkurve  $(\dot{\sigma})_2$  bzw. Beschleunigungsresonanzkurve  $(\ddot{\sigma})_2$

Anregungs- amplitude $A(\omega) \sim$	Lage des Maximums		
	der Schwingung	ihrer Geschwindigkeit	ihrer Beschleunigung
$\omega^0 = \text{const}$	$\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ $\approx \omega_0 \left(1 - \frac{m\delta^2}{c}\right)$	$\omega_0$	$\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$ $\approx \omega_0 \left(1 + \frac{m\delta^2}{c}\right)$
$\omega^1$	$\omega_0$	$\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$ $\approx \omega_0 \left(1 + \frac{m\delta^2}{c}\right)$	*
$\omega^2$	$\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$ $\approx \omega_0 \left(1 + \frac{m\delta^2}{c}\right)$	*	**

<sup>a)</sup> Oder die mit ihr zusammenhängende Energie (Intensität).

physikalische Bedeutung, von denen sich außerdem  $n = 0, 1, 2$  noch anschaulich deuten lassen, vgl. (8)–(10). Der Verlauf der Resonanzkurven  $\sigma_3(\omega, c)$  und  $\sigma_1(\omega, c)$  ist in den Abb. 10 und 11 dargestellt.

3. Aus der vorstehenden Bemerkung geht sofort hervor, daß die Resonanzlage  $\Omega_n$  auch anders als oben ermittelt werden kann, indem man bei gegebener Störampplitude (2) nach derjenigen Anregungsfrequenz fragt, für die die Geschwindigkeit<sup>a)</sup> bzw. Beschleunigung der jeweils erzwungenen Schwingung ein Maximum wird. Stellt man die sich ergebenden Werte zusammen, so erhält man in Erweiterung der Gl. (16) ... (18) nachstehende Tabelle:

In die freien Felder sind die Werte, welche sich aus der allgemeinen Lösung der Gl. (15):

$$\Omega_n^2 = \frac{(n-1)(\omega_0^2 - 2\delta^2)}{n-2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{n(n-2)\omega_0^2}{(n-1)^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)^2}} \right] \quad (57)$$

für  $n = 3$  bzw.  $n = 4$  ergeben, einzusetzen, die sich nun (auch in erster Näherung) nicht mehr auf eine so einfache Form bringen lassen, wie sie die oben eingetragenen Ausdrücke besitzen. Vielmehr erhält man jetzt ( $n \geq 3$ ) im allgemeinen zwei verschiedene reelle  $\Omega_n$ -Werte, die jeweils ein Maximum und ein Minimum der Resonanzkurve liefern. Das Auftreten dieser Extrema ist in den Abb. 10 und 11 deutlich erkennbar. Erinnernd sei bemerkt, daß die Gl. (16) und (17) die zuerst von M. Wien ausgesprochene Tatsache enthalten, daß bei einer erzwungenen Schwingung das Maximum derselben nicht mit dem Höchstwert ihrer (dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen) Energie zusammenfällt. Diese Aussage machte Wien für die durch eine Störung mit konstanter (in der hier benutzten Terminologie: „Beschleunigungs“-) Amplitude erzwungenen Schwingung. Der Satz gilt aber, wie man leicht einsieht, auch in solchen Fällen, in denen die Amplitude der Erregung frequenzabhängig ist, da offenbar nach (57) stets

$$\Omega_n \neq \Omega_{n+1} \quad (58)$$

ist.

4. Aus der vorstehenden Tabelle ist erkennbar, daß in zwei Fällen das Extremum einer Resonanzkurve gerade an der Stelle der natürlichen Eigenfrequenz  $\omega_0$  auftritt: einmal für das Geschwindigkeits- (Energie-) Maximum bei Anregung mit konstanter Beschleunigung, das andere Mal für das Maximum der erzwungenen Amplitude bei Erregung mit konstanter Geschwindigkeit, welche Fälle nach obigen äquivalent sind. Es entsteht nun die Frage, ob und gegebenenfalls für welche Werte von  $n$  bei einer „höheren“ Anregung  $A(\omega) \sim \omega^n$  weitere Extrema bei  $\Omega_n = \omega_0$  liegen. Die Antwort hierauf gibt Gl. (15), die als Bedingung hierfür

$$4(n-1)\delta^2\omega_0^2 = 0 \quad (59)$$

liefert. Dies bedeutet, daß (bei gedämpften Systemen), der obige Fall  $n = 1$  der einzige dieser Art ist. Bei ungedämpften Systemen dagegen tritt Resonanz für alle Bewegungsgrößen stets bei einer Störfrequenz auf, die gleich der natürlichen Eigenfrequenz  $\omega_0$  ist. Dann werden die jeweiligen Amplituden  $\infty$  groß.

5. Es sei schließlich noch auf eine gewisse Analogie hingewiesen, die die Gl. (46) ... (48) und (51) mit dem symbolischen Verfahren aufweisen, aus einem für einen Ohmschen Widerstand geltenden linearen Widerstandsoperator einen solchen für Induktivitäten bzw. Kondensatoren zu gewinnen. Es bedeutet dies im allgemeinen ein Ersetzen von  $R$  durch  $\omega L$  bzw.  $\frac{1}{\omega C}$ , also im wesentlichen eine Multiplikation mit bzw. Division durch  $\omega$ . Ebenso ergeben sich die Enveloppen  $\bar{s}_2$  und  $\bar{s}_0$  und Resonanzkurven  $\sigma_2$  und  $\sigma_0$  aus den entsprechenden des Falles  $n = 1$ . Es ist diesen eine Art „Zentralstellung“ zuzuschreiben, was auch aus dem Vergleich der Abb. 4–6 miteinander ersichtlich wird.

Berlin, Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität in Berlin-Charlottenburg.

(Bei der Redaktion eingegangen am 8. März 1948.)

# Die Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf von thermisch gedämpften elastischen Schwingungen

Von Max Päsler

(Mitteilung des Instituts für Theoretische Physik an der Technischen Universität in Berlin-Charlottenburg)

(Mit 1 Abbildung)

## Inhaltsübersicht

Der bei jeder Deformation eines elastischen Körpers auftretende thermoelastische Effekt bedingt, wenn das Elastikum Schwingungen ausführt, eine „thermische“ Dämpfung derselben. Folgerungen aus bisher angestellten Betrachtungen zu dieser Erscheinung schienen dazu zu berechtigen, den Satz auszusprechen: Der zeitliche Verlauf einer thermisch gedämpften Schwingung wird durch eine Differentialgleichung 3. Ordnung beschrieben, die stets gilt, gleichgültig, welche Gestalt der elastische Schwinger auch besitzen möge. Während die Richtigkeit dieser Behauptung bisher nur für spezielle Fälle gezeigt werden konnte, fehlte ein allgemeingültiger Beweis noch. Dieser wird in nachstehender Arbeit gebracht, indem von den Hauptgleichungen einer vektoriell angesetzten Theorie zur thermischen Dämpfung ausgegangen wird, aus denen die fragliche Differentialgleichung hergeleitet wird. Über die in ihr auftretenden Koeffizienten lassen sich allgemeine Aussagen machen. Teilweise enthalten diese Bekanntes als Sonderfälle, teilweise sind sie auch weitergehend.

Bekanntlich ist mit jeder Deformation eines elastischen Körpers ein als thermoelastischer Effekt bezeichnetes Phänomen verbunden, welches sich darin äußert, daß bei Elastica mit positiven Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  an Stellen, wo das Medium eine Kompression erfährt, Erwärmung, an Stellen der Dilatation dagegen Abkühlung auftritt<sup>1)</sup>, Abb. 1. Der dadurch entstehende Temperaturgradient hat



Abb. 1. Thermoelastischer Effekt in einem gebogenen Stab. Oberhalb der neutralen Faser wird infolge der Dehnung eine Abkühlung (—), unterhalb jener entsprechend Erwärmung (+) hervorgerufen. Der auftretende Temperaturgradient hat einen Wärmestrom  $\mathfrak{B}$  zur Folge

<sup>1)</sup> Bei Stoffen mit einem  $\alpha < 0$  (z. B. bei gewissen Kautschuksorten) liegen die Verhältnisse umgekehrt: Es tritt dann die Erwärmung dort auf, wo Dilatation, Abkühlung dagegen, wo Kompression herrscht.



einen Wärmestrom  $\mathfrak{S}$  zur Folge und dieser Energietransport gibt, wenn der elastische Körper Schwingungen ausführt, zu einer Dämpfung derselben Anlaß, die man ihrer Eigenart wegen als „thermische Dämpfung“<sup>2)</sup> bezeichnet. Sie stellt einen Anteil der in dem Begriff „innere Reibung“ zusammengefaßten Ursachen dar, die bei Deformationszuständen elastischer Körper in deren Innern auftreten und dann zu Dämpfungs- (oder Relaxations-)effekten Anlaß geben können. Da man aus den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen<sup>3)</sup> weiß, daß bei Schwingungen fester Körper, sofern diese nicht gerade adiabatisch bzw. isotherm<sup>4)</sup> verlaufen, die Dämpfung durch Wärmeleitung den fast ausschließlichen, jedenfalls im Vergleich zu anderen Ursachen den weitaus überwiegenden Beitrag zur inneren Reibung liefert, kann man diese beim festen Körper innerhalb eines weiten Frequenzbereiches mit der thermischen Dämpfung schlechthin identifizieren.

Eine Methode, welche die Berechnung derselben für einen beliebig gestalteten Schwinger gestattet, wurde kürzlich angegeben<sup>5)</sup>. Man benötigt hierzu eine erweiterte, den thermoelastischen Effekt berücksichtigende Bewegungsgleichung für den schwingenden Körper, die man gemäß dem Hamiltonschen Prinzip aus dem Variationsproblem

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ T \left( \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \right) - U(\varepsilon_{ik}, \vartheta) \right] dt = 0 \quad (1)$$

erhält, wenn man hierin die kinetische Energie  $T$  wie üblich durch die zeitliche Ableitung des Verschiebungsvektors  $\mathfrak{s}$  ausdrückt, indessen die potentielle Energie  $U$  nicht wie in der gewöhnlichen Mechanik deformierbarer Körper aus dem elastischen Potential  $u(\varepsilon_{ik})$  — dieses etwa als Funktion des Verzerrungstensors  $\varepsilon_{ik}$  ausgedrückt — ermittelt, sondern  $u(\varepsilon_{ik})$  durch einen modifizierten Ausdruck

$$\varphi = u(\varepsilon_{ik}) + v(\varepsilon_{ik}, \vartheta) \quad (2)$$

ersetzt, in dem  $v(\varepsilon_{ik}, \vartheta)$  ein Glied ist, das die durch die Deformation veränderten thermodynamischen Verhältnisse erfaßt und im Fall isotroper und homogener Körper die Form

$$v(\varepsilon_{ik}, \vartheta) = -\frac{c_s \vartheta^2}{2 T_0} - \frac{E \alpha \Theta}{1 - 2\mu} \vartheta \quad (3)$$

besitzt<sup>6)</sup>. Hierin bedeuten:  $c_s$  die spez. Wärme des Schwingers bei konstanten Ver-

<sup>2)</sup> Manchmal auch Dämpfung durch Wärmeleitung genannt.

<sup>3)</sup> Vgl. etwa: Bennowitz u. Rötger, Physik. Z. **37**, 578 (1936) (nachstehend als Arbeit BR I zitiert), — Cl. Zener, Physic. Rev. **52**, 230 (1937); **63**, 192, 582, 686 (1938); H. Rötger, Glastechn. Ber. **19**, 192 (1941) u. a.

<sup>4)</sup> D. h. extrem hohe bzw. tiefe Frequenzen besitzen.

<sup>5)</sup> M. Päsler, Z. Physik **122**, 357 (1947), nachstehend als Arbeit P I angeführt.

<sup>6)</sup> Vergleicht man (3) mit den entsprechenden Gl. (3,8) bzw. (3,14) der Arbeit P I, S. 367, so findet man, daß dort  $v$  mit entgegengesetzten Vorzeichen auftritt. Dies ist unrichtig und entstand dadurch, daß nicht beachtet wurde, daß bei W. Voigt (s. Zitate in P I), von dem der thermische Anteil  $v$  von (3,8) in P I übernommen wurde, so festgelegt ist, daß sich aus ihm die thermischen Spannungen, als die negativen Differentialquotienten nach den Tensorkomponenten  $\varepsilon_i$  ergeben, während die mechanischen die positiven partiellen Ableitungen von der in P I benutzten Form  $u(\varepsilon_i)$  sind. Es muß also, wenn der Ansatz für  $\varphi$  in der Form P I (3,8) beibehalten wird, dann Gl. (3,12) wie folgt abgeändert werden:

$$\sigma_i + \tau_i = -\frac{\partial v}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_i} = -\vartheta q + 2G \left\{ \varepsilon_i + \frac{\mu \Theta}{1 - 2\mu} \right\} \quad (\text{P I } 3,12)$$

zerrungen<sup>7)</sup>,  $\theta$  die durch den thermoelastischen Effekt bedingte (ortsabhängige) Übertemperatur, die ggf. auch negativ sein kann,  $T_0$  die Temperatur im undeformierten Zustand,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $\mu$  die Poissonsche Querkontraktionskonstante und  $\Theta = \text{div } \mathfrak{s}$  die Volumendilatation. Um die für Gl. (1) erforderliche potentielle Energie  $U$  zu finden, hat man die Größe  $\varphi^*)$  über den vorgegebenen schwingenden Körper zu integrieren. Zur Auswertung dieses Integrals benötigt man die Raum-Zeit-Abhängigkeit der entstehenden Übertemperatur  $\theta$ , die man als Lösung der erweiterten Wärmeleitungsgleichung erhält, welche — wieder Isotropie des Schwingers vorausgesetzt —

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \eta \Delta \theta - p \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (4)$$

lautet<sup>8)</sup>. In (4) bedeutet  $\eta$  das Temperaturleitvermögen, während  $p$  als Abkürzung für die Konstante

$$p = \frac{c_p - c_v}{3 \alpha c_p} \quad (5)$$

eingeführt ist<sup>10)</sup>.

Wie in der Arbeit P I bewiesen wurde, führt das Variationsproblem (1) in Verbindung mit (2) . . . (4) stets zu einer Bewegungsgleichung, die ein  $\frac{\partial}{\partial t}$ -, also ein Dämpfungsglied enthält, das mit  $\theta = 0$  verschwindet. Im übrigen tritt der Charakter des zusätzlichen Ausdrucks als Dämpfungsglied erst nach Separation der Bewegungsgleichung deutlich zutage. In dieser, einer partiellen Differentialgleichung, kommt das Zusatzglied als höhere gemischte Ableitung vor.

Fortsetzung der Fußnote <sup>9)</sup> von S. 15:

und es gibt dann der Vergleich mit P I Gl. (3,11)

$$q = -2 G \alpha \left( 1 + \frac{3 \mu}{1 - 2 \mu} \right) = -2 G \alpha \frac{1 + \mu}{1 - 2 \mu} = -\frac{E \alpha}{1 - 2 \mu}. \quad (\text{P I } 3,13)$$

Damit wird das zweite Glied in P I (3,8) negativ, wie es sein muß. Daß auch das erste Glied in dieser Gleichung ein negatives Vorzeichen erhalten muß — was aber im Weiteren nicht benötigt wird — erweist sich, wenn man den Ausdruck für die Entropie heranzieht. Es ist daher besser, man macht von vornherein einen der Gl. (3) der vorliegenden Arbeit entsprechenden, d. h. mit negativen Vorzeichen versehenen Ansatz für das Erweiterungsglied. Dann fällt die Beachtung des Vorzeichenunterschiedes bei der Berechnung der thermischen bzw. mechanischen Spannungen fort. Dies ist für die Rechnung zweckmäßiger. Die eben berichtigte Vorzeichenungenauigkeit zieht keine weiteren Folgen in P I nach sich, denn die darauffolgenden Abschnitte wurden s. Z. vor den allgemeinen Betrachtungen des Abschnitts 3 von P I durchgerechnet. Im übrigen ist bei den Beispielen in P I das negative Vorzeichen stets beachtet worden, vgl. P I (5,3), (6,3). Zu ändern sind lediglich die beiden ersten Vorzeichen der rechten Seite von Gl. (4,2) während (4,5) richtig ist. Daß das Vorzeichen von  $q$  gemäß (3,13) falsch sein muß, ergaben die Rechnungen der vorliegenden Arbeit, die mit den Ansätzen (4,1) . . . (4,3), von denen hier ausgegangen wird, zwar zu dem gesuchten Ergebnis, nämlich Gl. (7) dieser Arbeit führten, die jedoch an einer Stelle ein anderes als das erwartete Vorzeichen hatten. Unabhängig davon machte mich aber schon vor einiger Zeit Herr Professor Dr. v. Laue auf die Unstimmigkeit bezüglich des Vorzeichens von  $q$  aufmerksam. Ich möchte ihm für diesen Hinweis auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

<sup>7)</sup> Eine Verallgemeinerung des  $c_p$  = spez. Wärme bei konstanten Volumen.

<sup>8)</sup> Sie ist die freie Energie pro Volumeneinheit. Geeignet wäre für  $\varphi$ , da sich aus ihr durch partielle Differentiation die thermischen + mechanischen Spannungen ableiten lassen, vielleicht der Name „thermoelastisches Potential“.

<sup>9)</sup> Vgl. etwa W. Voigt, Theor. Phys. Bd. I, S. 553 Leipzig 1895.

<sup>10)</sup>  $c_p$  bzw.  $c_v$  = spez. Wärme bei konstantem Druck bzw. Volumen.

W  
führt  
einen  
leitung  
zeigt  
symm  
nämli  
 $\theta$  un  
Platte  
auf d  
fällen  
aus d  
Separ

eine E  
tunge  
überei

wobei  
anges  
Letzte  
wird  
sehen.  
stimm  
drücke  
Variab  
schreib  
von  $\mathfrak{s}$   
gleichu  
besond  
gilt. E  
sei nac  
Zu

in (1) e  
sind. I

$u(\varepsilon_{ik})$

<sup>11)</sup> M  
<sup>12)</sup> I  
<sup>13)</sup> I  
Ergebni  
stehend  
<sup>14)</sup> I

Ann.



Wie aus den in der Arbeit P I zur Anwendung der dort skizzierten Theorie angeführten Beispiele hervorgeht, ist zur Berechnung der thermischen Dämpfung für einen als vorgegeben anzusehenden Körper vorerst die Integration der Wärmeleitungsgleichung (4) erforderlich. Indessen konnte in einer späteren Arbeit <sup>11)</sup> gezeigt werden, daß sich diese ungehen läßt, wenn der Schwinger punkt- oder axial-symmetrisch gestaltet ist (Kugel, Zylinder). Für diese beiden Fälle kann man nämlich aus der Bewegungs- und der Wärmeleitungsgleichung die Übertemperatur  $\vartheta$  unmittelbar eliminieren, was in den anderen behandelten Beispielen in P I (Stab, Platte) nicht gelang. Es ist nun nicht der Hauptzweck der Arbeit P II gewesen, auf die Durchführbarkeit dieses Eliminationsprozesses in den genannten Sonderfällen hinzuweisen, vielmehr schien es wesentlich bemerkenswert, zu zeigen, daß aus der sich dann ergebenden ( $\vartheta$ -freien) Bewegungsgleichung durch einen geeigneten Separationsansatz für den zeitabhängigen Anteil  $F(t)$  des Verschiebungsvektors

$$\vec{s}(x, y, z, t) = \vec{s}(r, t) = f(r) \cdot F(t) \quad (6)$$

eine Beziehung folgt, die formal mit der, aus den in BR I durchgeführten Betrachtungen über die innere Reibung hergeleiteten Differentialgleichung vollkommen übereinstimmt. Dort (BR I) wird sie wie folgt angegeben:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{E}\right) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 \gamma s = 0, \quad (7)$$

wobei  $s$  als Amplitude eines punktförmigen Oszillators mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$  angesehen wird. Die Konstanten  $\gamma$  und  $\varepsilon$  bleiben in BR I vorerst unbestimmt. Letztere, das Produkt aus  $\gamma$  und einer weiteren in BR I eingeführten Größe  $\beta$ , wird als „zusätzlicher“ Elastizitätsmodul, ähnlich dem gewöhnlichen  $E$ , angesehen. In P II <sup>12)</sup> wurde nun u. a. gezeigt, daß es möglich ist, die nach (7) unbestimmten Größen  $\gamma$  und  $\varepsilon$  durch physikalische Konstanten des Schwingers auszu-drücken <sup>13)</sup>. In diesem Zusammenhang erwies es sich, daß die in BR I eingeführte Variable  $s(t)$  mit der die Zeitabhängigkeit des Verschiebungsvektors  $\vec{s}(r, t)$  beschreibenden Funktion  $F(t)$ , Gl. (6), zu identifizieren ist. Der ortsabhängige Teil von  $\vec{s}$  genügt dann der „gewöhnlichen“, d. h. der für  $\vartheta = 0$  geltenden Differentialgleichung. Es wurde nun bereits in P II behauptet <sup>14)</sup>, daß diese Verhältnisse, insbesondere Gl. (7), stets, d. h. unabhängig von der Geometrie des Schwingers gilt. Ein allgemeiner Beweis dafür konnte in P II noch nicht geliefert werden. Er sei nachstehend gebracht.

Zu diesem Zweck gehen wir mit ( $\rho$  = Dichte)

$$T = \iiint \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \right)^2 d\tau \quad (8)$$

$$U = \iiint [u(\varepsilon_{ik}) + v(\varepsilon_{ik}, \vartheta)] d\tau \quad (9)$$

in (1) ein, wobei die Integrale (8) und (9) über den schwingenden Körper zu nehmen sind. Für  $v$  ist (3), für  $u(\varepsilon_{ik})$  sein bekannter Wert für isentrope Körper

$$u(\varepsilon_{ik}) = \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \frac{1-\mu}{1-2\mu} \Theta^2 - 2(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2) \right\} \quad (10)$$

<sup>11)</sup> M. Päsler, Z. Physik 124, 105 (1947), nachstehend als Arbeit P II zitiert.

<sup>12)</sup> P II, S. 110/111.

<sup>13)</sup> Dies wurde übrigens auch von Bennowitz und Rötger, unter Zuhilfenahme der Ergebnisse der Arbeit von Cl. Zener, l. c., getan; Z. techn. Physik 19, 521 (1938), (nachstehend als BR II zitiert). Vgl. hierzu den letzten Teil dieser Arbeit.

<sup>14)</sup> P II, S. 113.

einzusetzen. Dann liefert die Variationsrechnung als allgemeine Bewegungsgleichung die bekannte Grundgleichung der Thermoelastizität<sup>15)</sup>

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathfrak{s} + \frac{1}{1-2\mu} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{s}) - \frac{2\alpha(1+\mu)}{1-2\mu} \operatorname{grad} \vartheta \right\}. \quad (11)$$

Hinzu kommt die Wärmeleitungsgleichung (4), die mit Benutzung des Vektors  $\mathfrak{s}$  die Form

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \eta \Delta \vartheta - p \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{s} \quad (12)$$

annimmt. Aus (11) und (12) ist nun zunächst die Übertemperatur  $\vartheta$  zu eliminieren. Dies läßt sich etwa wie folgt erreichen: Für beide Variablen  $\mathfrak{s}$  und  $\vartheta$  werde der Produktansatz

$$\mathfrak{s} = U(x, y, z) \cdot F(t) \quad (13)$$

$$\vartheta = V(x, y, z) \cdot f(t) \quad (14)$$

gemacht und damit in ihre Bestimmungsgleichungen (11) und (12) eingegangen. Dies liefert<sup>16)</sup>

$$\varrho U \frac{d^2 F}{dt^2} = G \left\{ F \left[ (\operatorname{div} \operatorname{grad}) U + \frac{1}{1-2\mu} \operatorname{grad} (\operatorname{div} U) \right] - \frac{2\alpha(1+\mu)}{(1-2\mu)} f \cdot \operatorname{grad} V \right\} \quad (15)$$

$$V \frac{df}{dt} = \eta f \Delta V - p \frac{dF}{dt} \operatorname{div} U. \quad (16)$$

Nimmt man von Gl. (15) die  $\operatorname{div}$ , so tritt in dem letzten Glied derselben die Größe  $f \Delta V$  auf, die auch aus (16) auszurechnen ist. Dies dann eingesetzt, liefert

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d^2 F}{dt^2} \operatorname{div} U &= G \left\{ F \left[ \operatorname{div} (\Delta U) + \frac{1}{1-2\mu} \operatorname{div} (\operatorname{grad} (\operatorname{div} U)) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\alpha(1+\mu)}{\eta(1-2\mu)} \left[ V \frac{df}{dt} + p \frac{dF}{dt} \operatorname{div} U \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Gradientenbildung von (17) führt zu

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d^2 F}{dt^2} \operatorname{grad} (\operatorname{div} U) &= GF \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \left[ \Delta U + \frac{1}{1-2\mu} \operatorname{grad} (\operatorname{div} U) \right] \right) \\ &\quad - \frac{2\alpha G(1+\mu)p}{\eta(1-2\mu)} \cdot \frac{dF}{dt} \operatorname{grad} (\operatorname{div} U) - \frac{2\alpha(1+\mu)G}{\eta(1-2\mu)} \frac{df}{dt} \operatorname{grad} V. \end{aligned} \quad (18)$$

Hier treten die  $\vartheta$  bestimmenden Funktion  $f$  und  $V$  nur noch im letzten Glied auf, das man aber auch durch  $U$  und  $F$  allein ausdrücken kann, indem man (15) nach  $t$  differenziert. Man erhält

$$-\frac{2\alpha G(1+\mu)}{(1-2\mu)\eta} \frac{df}{dt} \operatorname{grad} V = \frac{\varrho}{\eta} U \frac{d^2 F}{dt^2} - \frac{G}{\eta} \frac{dF}{dt} \left[ \Delta U + \frac{1}{1-2\mu} \operatorname{grad} (\operatorname{div} U) \right]. \quad (19)$$

<sup>15)</sup> Vgl. etwa A. Föppl, Techn. Mechanik, Bd. V, S. 238, Teubner Leipzig 1918.

<sup>16)</sup>  $G = \frac{E}{2(1-2\mu)}$  Gleitmodul.

Dies in (18) eingesetzt, liefert bereits die  $\vartheta$ -freie Gleichung:

$$\varrho \frac{d^2 F}{dt^2} \text{grad} (\text{div } U) = G F \text{grad} \left( \text{div} \left[ \Delta U + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad} (\text{div } U) \right] \right) \quad (20)$$

$$- \frac{2\alpha G p (1+\mu)}{\eta (1-2\mu)} \frac{dF}{dt} \text{grad} (\text{div } U) + \frac{\varrho U d^2 F}{\eta dt^2} - \frac{G dF}{\eta dt} \left[ \Delta U + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad} (\text{div } U) \right];$$

die nach geringer Umformung und geeigneter Zusammenfassung auf die Form gebracht werden kann:

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dt^2} - \eta \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dt^2} \cdot \frac{1}{U} \text{grad} (\text{div } U)$$

$$- \frac{G}{\varrho} \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} \cdot \frac{1}{U} \left\{ \Delta U + \frac{1+2\alpha p (1+\mu)}{1-2\mu} \text{grad} (\text{div } U) \right\} \quad (21)$$

$$+ \frac{G \eta}{\varrho} \cdot \frac{1}{U} \text{grad} \left( \text{div} \left[ \Delta U + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad} (\text{div } U) \right] \right) = 0.$$

In dieser Gleichung ist schon zu erkennen, daß die zeitlichen Ableitungen in denselben Ordnungen wie in Gl. (7) auftreten. Es bleibt noch zu beweisen übrig, daß die Koeffizienten der einzelnen Differentialquotienten in (21) sich ebenso wie dort schreiben lassen. Um dies zu zeigen, machen wir von der geläufigen Schlußmethode Gebrauch, daß wegen des besonderen Baus von (21) die Koeffizienten der zeitlichen Ableitungen Konstanten sein müssen, also:

$$- \text{grad} (\text{div } U) = k_1 U \quad (22)$$

$$\Delta U + \frac{1+2\alpha p (1+\mu)}{1-2\mu} \text{grad} (\text{div } U) = k_2 U \quad (23)$$

$$\text{grad} \left\{ \text{div} \left[ \Delta U + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad} (\text{div } U) \right] \right\} = k_3 U. \quad (24)$$

Die Konstanten  $k_1, k_2, k_3$ , deren Wert offenbar von der Gestalt des schwingenden Körpers abhängt — die Differentialgleichungen (22) ... (24) beschreiben ja den ortsabhängigen Teil des Verschiebungsvektors — sind nicht von einander unabhängig. Man kann ersichtlich eine durch die anderen ausdrücken. So folgt aus (22) und (23):

$$\Delta U = \left[ \frac{1+2\alpha p (1+\mu)}{1-2\mu} k_1 + k_2 \right] U \quad (25)$$

und dies in (24) eingesetzt, gibt

$$\left[ k_3 + \frac{1+2\alpha p (1+\mu)}{1-2\mu} k_1 - \frac{k_1}{1-2\mu} \right] \text{grad} (\text{div } U) = k_3 U \quad (26)$$

oder wegen (22)

$$\left[ k_3 + \frac{2\alpha p (1+\mu)}{1-2\mu} k_1 \right] (-k_1) = k_3, \quad (27)$$

woraus etwa für  $k_2$  folgt

$$k_2 = -\frac{k_3}{k_1} - \frac{k_1 2\alpha p(1+\mu)}{1-2\mu}. \quad (28)$$

Berücksichtigt man (22) ... (24) und setzt für  $k_2$  den Wert (28) ein, so erhält man aus (21)

$$\frac{d^3 F}{dt^3} + k_1 \eta \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{G}{\varrho} \left[ \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1 2\alpha p(1+\mu)}{1-2\mu} \right] \frac{dF}{dt} + \frac{G \eta k_2}{\varrho} F = 0 \quad (29)$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{d^3 F}{dt^3} + k_1 \eta \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{E k_2}{2(1-2\mu)\varrho k_1} \left( 1 + \frac{k_1^2}{k_2} \cdot \frac{2\alpha p(1+\mu)}{1-2\mu} \right) \frac{dF}{dt} \\ + \frac{E \eta k_2}{2\varrho(1-2\mu)} F = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Mit

$$k_1 \eta = \gamma \quad (31)$$

und

$$\frac{E k_2}{2(1-2\mu)\varrho k_1} = \omega_0^2 \quad (32)$$

geht (30) in der Tat in Gl. (7) über, wenn für

$$\frac{k_1^2 2\alpha p(1+\mu)}{k_2(1-2\mu)} = \frac{\varepsilon}{E} \quad (33)$$

gesetzt wird. Als Ergebnis der vorstehenden Rechnung kann also folgender — in P II bereits als Vermutung geäußelter — Satz allgemein ausgesprochen werden: Liegt eine durch thermische Dämpfung beeinflusste Schwingung eines elastischen Körpers vor, so wird der zeitliche Verlauf derselben bei beliebiger Gestalt des Schwingers stets durch die Differentialgleichung dritter Ordnung (7) beschrieben. Die darin auftretenden Koeffizienten sind dabei durch (31) ... (33) gegeben. Über jene lassen sich folgende allgemeine Aussagen machen:

Die „zusätzliche“ Größe  $\varepsilon$  ist nach (33) unter Beachtung von (5) darstellbar in der Form

$$\varepsilon = \frac{2 k_1^2 \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) (1+\mu)}{k_2 (1-2\mu)} E, \quad (34)$$

d. h.  $\varepsilon$  ist tatsächlich als Elastizitätsmodul zu deuten, der dem Ausdruck  $\frac{c_p - c_v}{c_v}$  proportional ist. In BR II<sup>17)</sup> werden für  $\varepsilon$  die Beziehungen

$$\varepsilon = E_{ad} - E_{iso} \quad (35)$$

$$\frac{\varepsilon}{E} = \frac{c_p - c_v}{c_v} \quad (36)$$

hergeleitet, woraus folgt

$$\varepsilon = \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) E, \quad (37)$$

<sup>17)</sup> BR II: S. 522, Gl. (5) und (10).

welches Ergebnis mit (34) augenscheinlich nicht übereinstimmt. Der Unterschied ist offenbar auf Annahmen, die den Rechnungen in BR I zugrunde liegen, zurückzuführen<sup>18)</sup>. Der in P I gemachte und hier verwendete allgemeinere vektorielle Ansatz läßt die etwas weitergehende Aussage (34) über die Größe  $\varepsilon$  zu. Es ist leicht zu zeigen, daß tatsächlich die in BR II hergeleiteten Ergebnisse (35) und (36) nicht für einen schwingenden Körper gelten können, denn nach Obigem ist

$$E_{ad} - E_{iso} = \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) E_{iso}, \quad (38)$$

wonach die Differenz zwischen dem adiabatischen und isothermen Elastizitätsmodul von der Poissonschen Konstanten unabhängig wäre. Dies gilt wohl für den Fall, daß das elastische Medium ein Gas ist und aus (38) folgt in der Tat die geläufige Beziehung

$$E_{ad} = \frac{c_p}{c_v} E_{iso}, \quad (39)$$

die für ein den Gasgesetzen gehorchendes Medium gilt. Ein isotroper fester Körper wird aber bekanntlich durch zwei Elastizitätskoeffizienten charakterisiert<sup>19)</sup> und zwischen deren adiabatischen und isothermen Werten besteht die bekannte<sup>20)</sup> Beziehung

$$c_1^{ad} = c_1^{iso} + \frac{r^2 T_0}{\varrho c_v} \quad (40)$$

$$c_2^{ad} = c_2^{iso}, \quad (41)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  diejenigen Elastizitätsmoduln sind, die vermittels der Beziehungen

$$\left( c_2 \frac{3c_1 + c_2}{2c_1 + c_2} \right)_{iso} = E_{iso} \quad (42)$$

$$\frac{c_1}{2c_1 + c_2} = \mu \quad (43)$$

zu den gebräuchlichen, hier verwendeten Größen  $E$  und  $\mu$  führen. Die in (40) auftretende Konstante  $r$  ist der Koeffizient der sog. thermischen Spannung, definiert durch

$$-r \vartheta = X_s^{therm} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_{ss}} = - \frac{E \alpha \vartheta}{1 - 2\mu}. \quad (44)$$

Danach ist also

$$r = \frac{E \alpha}{1 - 2\mu}. \quad (45)$$

Andererseits gilt nach den Gesetzen der Thermodynamik allgemein<sup>21)</sup>

$$c_p - c_v = \frac{3 T_0 r \alpha}{\varrho}. \quad (46)$$

<sup>18)</sup> Verwendung der gewöhnlichen Schwingungsgleichung zur Beschreibung der Bewegung von elastischen Körpern.

<sup>19)</sup> Z. B. durch die hier verwendeten Konstanten  $E$  und  $\mu$ .

<sup>20)</sup> Vgl. etwa W. Voigt, Theor. Phys. Bd. I, S. 538. Leipzig 1895.

<sup>21)</sup> Vgl. etwa W. Voigt, Theor. Phys. Bd. I, S. 552. Leipzig 1895.

Hiermit ergibt sich aus (40) in Verbindung mit (45) für die Differenz

$$c_{1ad} - c_{1iso} = \frac{E \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right)}{3(1 - 2\mu)} \quad (47)$$

d. h. sie ist in der Tat von beiden Elastizitätskoeffizienten abhängig. Aus (42) läßt sich mit (47), (43) und (41) die Differenz  $E_{ad} - E_{iso}$  bestimmen, die von der Form

$$E_{ad} - E_{iso} = f \left( \frac{c_p}{c_v}, E, \mu \right) \quad (48)$$

ist. Demnach kann das in BR II ermittelte, hier als Gl. (38) angegebene Resultat sicher nicht allgemein gültig sein. Dessen spezielle Form liegt ersichtlich in der Art seiner Herleitung begründet<sup>22)</sup>, wo angenommen wird, daß die Eigenfrequenz eines Schwingers lediglich von einer Elastizitätskonstanten, eben  $E$ , abhängt, was bekanntlich nicht in Strenge der Fall.

Was die zweite in Gl. (7) auftretende Konstante  $\gamma$  betrifft, so ist diese nach Gl. (31) dem Temperaturleitvermögen  $\eta$  proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor  $k_1$  den Eigenwerten des jeweilig vorliegenden Schwingungsproblems entspricht. Diese Aussage ist allgemein gültig und deckt sich mit dem in BR II gefundenen speziellen Ergebnis, daß  $\gamma$  vom Querschnitt des Schwingers (dort wird als solcher stets ein Stab angesetzt) abhängig ist. Da die Größe  $\gamma$  eine reziproke Zeit (Relaxationszeit) ist,

$$\gamma = \frac{1}{\tau}, \quad (49)$$

für die übrigens das Maximum der thermischen Dämpfung eintritt, läßt sich die Abhängigkeit derselben von der Geometrie des Schwingers experimentell bestens prüfen. Es ergab sich gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch. Die spezielle Abhängigkeit von  $\gamma$  bei rotationssymmetrischen Schwingern von den Eigenwerten ist in P II<sup>23)</sup> berechnet.

Es sei abschließend noch bemerkt, daß man aus der Form der Differentialgleichung der thermischen Dämpfung rückwärts darauf schließen kann, daß es sich bei dem fraglichen Vorgang um eine Schwingung handeln muß, die mit einer zweiten Bewegung, die jedoch nur geschwindigkeitsabhängig sein kann, gekoppelt sein muß. Dies legt das Auftreten des 3. Differentialquotienten nahe. Nennt man die eine schwingende Größe etwa  $x_1$ , die andere  $x_2$ , so überlegt man leicht, weil nach Elimination von  $x_2$  für  $x_1$  die Differentialgleichung (7) gelten muß, daß die ursprünglich gekoppelten Bewegungsgleichungen von nachstehender Form sein müssen: entweder

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 x_1 + \bar{c}_{11} \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad (50)$$

$$\bar{c}_{21} \frac{dx_1}{dt} + c_2 x_2 + \bar{c}_{22} x_1 = 0 \quad (51)$$

<sup>22)</sup> BR II, S. 522.

<sup>23)</sup> P II, S. 111, Gl. (21).

oder

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 x_1 + \bar{c}_{11} x_2 = 0 \quad (52)$$

$$\varrho_2 \frac{dx_2}{dt} + c_2 x_2 + \bar{\varrho}_{22} \frac{dx_1}{dt} = 0. \quad (53)$$

Die in den beiden Gleichungssystemen auftretenden Koeffizienten können im Sinne der Theorie der Schwingungen eines Massenpunktes gedeutet werden als:  $m$  = Masse,  $c_1, c_2$  = Koeffizienten der rücktreibenden Kraft,  $\varrho_2$  = derjenige der Reibungskraft,  $\bar{\varrho}_{11}, \bar{\varrho}_{22}$  bzw.  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{22}$  Kopplungskoeffizienten der Geschwindigkeits- bzw. Kraftkopplungsglieder. Daß tatsächlich aus obigen Ansätzen die „thermische Dämpfungsgleichung“ sowohl für  $x_1$  als auch für  $x_2$  folgt, ist leicht durch Elimination einzusehen, die etwa für  $x_2$  aus den Gl. (52) und (53) angedeutet werde. Zunächst ergibt Differentiation von (52) und Elimination der dann auftretenden Größe  $\frac{dx_2}{dt}$  die Beziehung

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left( c_1 - \bar{c}_{11} \frac{\bar{\varrho}_{22}}{\varrho_2} \right) \frac{dx_1}{dt} - \bar{c}_{11} \frac{c_2}{\varrho_2} x_2 = 0. \quad (54)$$

Kombiniert man dies mit (52), so gelangt man zu

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_1 \frac{c_2}{\varrho_2} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \left( 1 - \frac{\bar{c}_{11} \bar{\varrho}_{22}}{c_1 \varrho_2} \right) \frac{dx_1}{dt} + c_1 \frac{c_2}{\varrho_2} x_1 = 0. \quad (55)$$

Dies ist bereits die fragliche Differentialgleichung, in der, um vollkommene formale Übereinstimmung mit (7) zu erhalten, für die Kopplungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_{22} &= \mp \varrho_{22} \\ \bar{c}_{11} &= \pm c_{11} \end{aligned} \quad (56)$$

gesetzt werden muß. Dann erhält man nach Division durch  $m_1$ , wenn noch  $\frac{c_1}{m_1} = \omega_0^2$  (= Eigenfrequenz des schwingenden Massenpunktes) gesetzt wird

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{c_2}{\varrho_2} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 \left( 1 + \frac{c_{11} \varrho_{22}}{c_1 \varrho_2} \right) \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 \frac{c_2}{\varrho_2} x_1 = 0. \quad (57)$$

Daß diese Gleichung aus dem System (52) + (53) resultiert, ist nicht weiter verwunderlich, denn im Grunde genommen stellt jenes den in BR I gemachten Ansatz in etwas anderer Form dar. Im übrigen entspricht er auch den Gl. (11) und (12) dieser Arbeit. Durch Vergleich findet man, daß insbesondere der „zusätzliche“ Elastizitätsmodul

$$\varepsilon = \frac{c_{11} \varrho_{22}}{\varrho_2} \quad (58)$$

ist. Er hängt also wesentlich von den Kopplungskoeffizienten ab. Daß sich die Relaxationszeit  $\gamma$  hier in Gegensatz zum Experiment als von der Form des (in Wirklichkeit) vorhandenen schwingenden Körpers unabhängig erweist, liegt offenbar in dem zu einfachen Ansatz. Wird dieser vektoriell formuliert, so ergeben sich, wie oben gezeigt, allgemeine und weitergehende Ergebnisse als die früher gefundenen.



## Nachtrag

• Nach Fertigstellung vorstehender Arbeit wurde bei dem Studium des hier mehrfach in Zitaten erwähnten Werkes von W. Voigt eine Gleichung gefunden, die, obwohl sie mit den wie hier betrachteten Dingen in keinem ursächlichen Zusammenhang steht, dennoch der Differentialgleichung der thermischen Dämpfung vollkommen entspricht. Es wird bei Voigt die Ausbreitung von Störungen in einem unendlich ausgedehnten gasförmigen Medium betrachtet und dabei unter Berücksichtigung der entstehenden Kompressionswärme für die Volumendilatation  $\Theta$  eine Differentialgleichung hergeleitet, die (nach Umschreibung in Vektorform und bei Verwendung der in dieser Arbeit benutzten Symbole) die Form

$$\varrho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \eta \Delta \left( c \Delta \Theta - \varrho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \right) - \left( p \frac{P_0}{T_0} + c \right) \Delta \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0 \quad (59)$$

besitzt<sup>24)</sup>. Hierin bedeuten:  $c = P_0$  die (einzige) Elastizitätskonstante (= reziproke Kompressibilität) der idealen Flüssigkeit,  $P_0$  der Druck, unter dem diese im Normalzustand steht,  $\Delta$  der Laplacesche Operator. Daß aus (59) auch eine der Gl. (7) analoge hergeleitet werden kann, läßt sich wie oben leicht zeigen, indem für die Dilatation der Produktansatz

$$\Theta(x, y, z, t) = U(x, y, z) \cdot F(t) \quad (60)$$

gemacht wird. Dann geht (59) über in

$$\frac{d^2 F}{dt^2} - \eta \frac{\Delta U}{U} \frac{d^2 F}{dt^2} - \frac{c}{\varrho} \left( 1 + \frac{p P_0}{c T_0} \right) \frac{dF}{dt} \frac{\Delta U}{U} + \frac{\eta c}{\varrho} F \cdot \Delta U = 0. \quad (61)$$

Mit dem üblichen Schluß, daß die Koeffizienten der zeitlichen Differentialquotienten Konstanten sein müssen,

$$\Delta U = -k U \quad (62)$$

$$\Delta \Delta U = k^2 U \quad (63)$$

liefert (61)

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \eta k \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{c k}{\varrho} \left[ 1 + \frac{(c_p - 1)}{3 \alpha T_0} \right] + \frac{\eta c k^2}{\varrho} F = 0, \quad (64)$$

welche Gleichung formal hinsichtlich ihres Aufbaus mit (7) übereinstimmt. Daß, wie ein Vergleich mit (30) zeigt, die Koeffizienten dort eine allgemeinere Form als in (64) aufweisen, liegt daran, daß Voigt seine Beziehung (59) aus den speziellen Gleichungen für eine ideale Flüssigkeit, die nur eine Elastizitätskonstante besitzen, herleitet, während hier die Grundgleichungen des elastischen festen Körpers den Ausgangspunkt bildeten, in denen zwei Elastizitätskonstanten auftreten. Es ist wohl aber bemerkenswert, daß die hier im Mittelpunkt der Behandlung stehende Differentialgleichung sich schon in der älteren Literatur findet.

<sup>24)</sup> W. Voigt, l. c. S. 554, Gl. (66''').

Berlin, Institut für Theoretische Physik an der Technischen Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 23. März 1948.)



## Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Drahtgitter<sup>1)</sup>

Von Richard Honerjäger

(Mit 16 Abbildungen)

### Inhaltsübersicht

Unter einem ebenen Drahtgitter verstehen wir jede Anordnung von gleichen, geraden, zylindrischen und parallelen Drähten beliebigen Querschnitts, deren Achsen in einer Ebene liegen. Das elektrische und magnetische Verhalten der Drähte ist durch die (komplexe) Dielektrizitätskonstante und die (komplexe) Permeabilität des Drahtmaterials bestimmt.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Beugung einer ebenen, transversalen und linear polarisierten, elektromagnetischen Welle an einem allseitig unendlich ausgedehnten, ebenen Gitter aus äquidistanten, kreiszylindrischen Metalldrähten. Es wird vorausgesetzt, daß die Leitfähigkeit der Gitterdrähte unendlich groß und ihr Umfang klein gegenüber der Gitterkonstanten und der Wellenlänge der einfallenden Welle ist. Gitterkonstante und Wellenlänge können in einem beliebigen Verhältnis zueinander stehen. Diese Voraussetzungen beschränken die praktische Anwendbarkeit der Theorie auf die kurzen elektrischen und die längsten ultraroten Wellen.

Die Rechnung wird unter der Annahme durchgeführt, daß das elektrische Feld der einfallenden Welle zu den Gitterdrähten parallel schwingt. Der Fall beliebiger Polarisierung ist in der Theorie enthalten, da ein Gitter aus „dünnen“ Drähten vollkommenen Hertz-Effekt zeigt, d. h. die Komponente, deren elektrisches Feld auf den Gitterdrähten senkrecht steht, durchdringt das Gitter ungestört.

Wessel<sup>2)</sup> berechnete unter den gleichen Voraussetzungen die Durchlässigkeit eines ebenen Drahtgitters bei senkrechtem Einfall der ebenen Welle auf das Gitter und gab die Lösung für ein Intervall des Verhältnisses der Wellenlänge zur Gitterkonstanten von  $\frac{1}{2} < \frac{\lambda}{d} < \infty$ . In der vorliegenden Arbeit wird die Wesselsche Gittertheorie für beliebige Einfallswinkel und beliebige Werte von  $\frac{\lambda}{d}$  erweitert, die Durchlässigkeit des Gitters und die Intensität der Beugungswellen werden berechnet und die Theorie mit Rohrwellen experimentell geprüft.

Das Drahtgitter ist unabhängig vom Drahtradius vollständig durchlässig, wenn zwischen der Wellenlänge  $\lambda$ , der Gitterkonstanten  $d$  und dem Einfallswinkel  $\alpha_0$  die Gleichung

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{1 \pm \sin \alpha_0}{\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots)$$

<sup>1)</sup> Auszug aus einer der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Frankfurt am Main eingereichten Habilitationsschrift.

<sup>2)</sup> W. Wessel, Hochfrequenztechn. u. Elektrik. 54, 62 (1939).

besteht. Für die Werte von  $\frac{\lambda}{d}$  und  $\alpha_0$ , welche dieser Gleichung genügen, verschwinden alle Beugungswellen: das Beugungsspektrum eines Kontinuums weist an diesen Stellen in Reflexion und Durchlässigkeit „dunkle Streifen“ auf. Alle Beugungswellen sind linear polarisiert (elektrisches Feld parallel zu den Gitterdrähten).

Bei streifendem Einfall geht die Durchlässigkeit des Gitters in der Grenze  $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  im allgemeinen gegen 0. Für  $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{\mu}$  wird sie (unabhängig vom Drahtradius) gleich  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{4}$ , je nachdem man sich der kritischen Stelle aus dem Gebiet  $\frac{\lambda}{d} > \frac{1 + \sin \alpha_0}{\mu}$  bzw.  $\frac{\lambda}{d} < \frac{1 + \sin \alpha_0}{\mu}$  nähert. Ein Drahtgitter, auf das ein kontinuierliches Spektrum von zu den Gitterdrähten parallel polarisierten Wellen streifend auffällt, ist selektiv durchlässig für Wellenlängen  $\lambda \approx \frac{2d}{\mu}$ .

Die Theorie wird mit einer  $H_{10}$ -Rohrwellen in einem Metallrohr von rechteckigem Querschnitt experimentell geprüft. Gegenüber freien Raumwellen bietet die Verwendung von Rohrwellen zwei wesentliche Vorteile: 1. Die elektromagnetische Welle breitet sich ungestört in einem vollständig abgeschlossenen Rohr aus. 2. Ein symmetrisch im Rohr angebrachtes Drahtgitter realisiert ein unendlich ausgedehntes Gitter, da die Metallwände des Rohres auf kurze elektrische Wellen wie vollkommene Spiegel wirken; daher werden unübersichtliche Beugungserscheinungen, die am Rande eines großen, aber endlich ausgedehnten Gitters auftreten, vermieden.

Es wird eine Methode beschrieben, die Rohrenden jeweils für einen monochromatischen Rohrwellentyp reflexionsfrei abzuschließen und die Reflexionsfreiheit in einfacher Weise experimentell zu prüfen.

Es wird im Wellenlängenbereich  $8,5 < \lambda < 11,4$  cm gemessen. Die Meßergebnisse bestätigen die Gittertheorie.

## 1. Einleitung

Experimentelle Arbeiten mit  $H_{m0}$ -Rohrwellen in einem Metallrohr von rechteckigem Querschnitt bildeten den Anlaß zu der vorliegenden Untersuchung. Seit Lord Rayleigh<sup>1)</sup> ist bekannt, daß sich im Innern eines jeden Metallrohres ebene elektromagnetische Wellen in Richtung der Rohrachse ausbreiten können, wenn ihre Frequenz oberhalb einer kleinsten Grenzfrequenz liegt, die durch den Rohrquerschnitt bestimmt ist. Man pflegt diese Wellen als „Rohrwellen“ zu bezeichnen. Die der kleinsten Grenzfrequenz entsprechende Wellenlänge bei Ausbreitung der Wellen im freien Raum, die sogenannte „Grenzwellenlänge“, ist von der Größenordnung der Linearausdehnung des Rohrquerschnitts; sie ist bei Rohren von gebräuchlichem Querschnitt also relativ klein. Seitdem man sehr kurze, ungedämpfte elektrische Wellen von beträchtlicher Energie erzeugen kann, ist die Methode der Fortleitung von elektromagnetischer Strahlung durch Rohre auch von praktischer Bedeutung geworden.

Schon Rayleigh zeigte, daß es zwei Typen von elektromagnetischen Wellen im Rohr gibt, die man heute  $E$ -Rohrwellen und  $H$ -Rohrwellen nennt. Außer transversalen Feldkomponenten besitzen die  $E$ -Wellen auch ein longitudinales elektrisches Feld, jedoch kein longitudinales magnetisches Feld, und umgekehrt

<sup>1)</sup> Rayleigh, Philos. Mag. (5) 43, 125 (1897).

haben  $H$ -Wellen auch ein longitudinales magnetisches, aber kein longitudinales elektrisches Feld.

$H_{m0}$ -Wellen in einem Rohr von rechteckigem Querschnitt kann man sich entstanden denken als Interferenzfeld einer ebenen, transversalen und linear polarisierten Welle, die an zwei einander gegenüberliegenden Rohrwänden dauernd hin- und herreflektiert wird (Abb. 1). Ihre Wellennormale bildet mit den Metallwänden den Winkel  $+\alpha_0$  und  $-\alpha_0$ . Der elektrische Vektor steht auf der Bildebene senkrecht, der magnetische Vektor liegt in der Bildebene. Zwischen dem „Glanzwinkel“  $\alpha_0$ , der Wellenlänge  $\lambda$  und dem Abstand  $a$  der beiden Rohrwände besteht die Braggsche Gleichung:

$$\sin \alpha_0 = \frac{m \lambda}{2a} \quad (1)$$

$$(0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}; m = 1, 2, 3, \dots).$$

In der heute üblichen Bezeichnung der Rohrwellen heißt das beschriebene Wellenfeld eine  $H_{m0}$ -Welle. Sie besitzt in ihrer Ausbreitungsrichtung, der Rohrachse, ein longitudinales magnetisches Feld, jedoch kein elektrisches



Abb. 1. Entstehung einer  $H_{m0}$ -Welle im rechteckigen Rohr

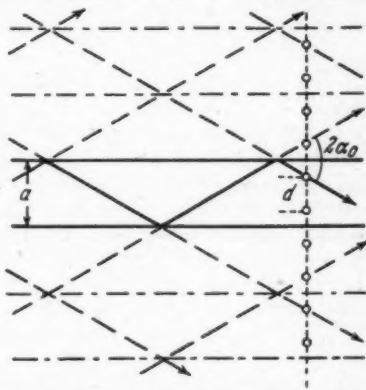


Abb. 2. Spiegelung einer  $H_{m0}$ -Welle und zweier Gitterdrähte an zwei einander gegenüberliegenden Wänden eines rechteckigen Rohres

Feld. Der Index  $m$  ist gleich der ganzen Zahl  $m$  in der Braggschen Gleichung; der zweite Index 0 bedeutet, daß das elektrische Feld der Welle nur eine zu einer Rohrwand parallele Komponente hat.

$H_{m0}$ -Rohrwellen sind wegen ihrer einfachen Feldstruktur von praktischem Interesse. Wir behandeln das Problem der Beugung einer  $H_{m0}$ -Welle an einem ebenen Drahtgitter, dessen Gitterdrähte zum elektrischen Feld parallel sind. — Man löst die Aufgabe am einfachsten nach dem aus der Elektrostatik bekannten Spiegelungsverfahren, d. h. man ersetzt das vorliegende Problem durch dasjenige, welches durch Spiegelung an den vier Wänden des rechteckigen Rohres entsteht. Durch unendlich oft wiederholte Spiegelung der  $H_{m0}$ -Welle an den Rohrwänden entsteht das den ganzen Raum erfüllende Interferenzfeld zweier sich kreuzender, ebener Transversalwellen, deren Wellennormalen miteinander den Winkel  $2\alpha_0$  bilden. Die Spiegelung des Drahtgitters ergibt ein unendlich ausgedehntes, ebenes Gitter (Abb. 2). — Wir wollen noch voraussetzen, daß das durch Spiegelung entstandene Gitter aus äquidistanten Drähten besteht und daß nicht alle Drähte in Knotenebenen des elektrischen Interferenzfeldes liegen. D. h. das Gitter soll zu den Rohrwänden symmetrisch angeordnet, die Rohrbreite  $a$  ein ganzzahliges Vielfaches der Gitterkonstanten  $d$ ,

$$a = l d \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

und  $\frac{m}{2l}$  nicht gleich einer ganzen Zahl sein.

Unter Umständen gehen vom Gitter auch Beugungswellen unter den Winkeln  $\alpha_i$  aus, nämlich dann, wenn die Differenz der Gangunterschiede der einfallenden und der Beugungswelle gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge ist:

$$d \sin \alpha_0 - d \sin \alpha_i = i \lambda \quad (3)$$

$$(-\pi < \alpha_i < \pi; \quad i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Aus den Gln. (1), (2) und (3) folgt

$$\sin \alpha_i = \frac{(m - 2li)\lambda}{2a}, \quad (4)$$

d. h. die  $i$ -te Beugungswelle ist wiederum eine  $H$ -Rohrwelle mit den Indizes  $m' = m - 2li$  ( $\neq 0$ ) und 0.

Da alle Felder und Ströme sich linear superponieren, ist das Verhalten des Drahtgitters gegenüber einer auffallenden  $H_{m0}$ -Welle vollständig bekannt, wenn das Problem der Beugung einer einzigen ebenen und linear polarisierten Transversalwelle gelöst ist, die unter dem Einfallswinkel  $\alpha_0$  auf das gleiche, nur unendlich ausgedehnt gedachte Gitter fällt. Die Beugungsaufgabe ist im Falle dünner Gitterdrähte verhältnismäßig einfach zu lösen. Der Gitterdrahtdurchmesser soll gegenüber der Wellenlänge und der Gitterkonstanten so klein sein, daß sie Ströme in den Gitterdrähten nahezu gleichförmig über den Drahtumfang verteilt sind. Das Verhältnis der Wellenlänge zur Gitterkonstanten braucht keiner Beschränkung zu unterliegen. Unter diesen Voraussetzungen hat Wessel (a. a. O.) die Beugungsaufgabe für senkrechten Einfall der Welle auf das Gitter vollständig gelöst. Es ist das Ziel dieser Arbeit, die Wesselsche Theorie unter den gleichen Voraussetzungen für beliebige <sup>4)</sup> Einfallswinkel  $\alpha_0$  zu verallgemeinern und die Theorie mittels  $H_{m0}$ -Wellen im rechteckigen Rohr experimentell zu prüfen.

## 2. Lösung der Beugungsaufgabe

Das Gitter liege in der  $x$ - $y$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Abb. 3). Die Gitterdrähte seien mit der Zahl  $n$  numeriert ( $n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty$ ). Die Achse des 0-ten Gitterdrahts falle mit der  $y$ -Achse zusammen. Der Aufpunkt  $P$  (Ortsvektor  $\mathbf{r}$ ) liege in der  $x$ - $z$ -Ebene. Eine linear polarisierte, ebene Welle (elektrische Feldstärke  $E_A$ , Kreisfrequenz  $\omega$ , Wellenlänge  $\lambda$ ),

$$E_A(P) = E_0 e^{j\omega t - j(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} \quad (5)$$

$$(j = \sqrt{-1}; \quad |\mathbf{k}_0| = k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

falle unter dem Einfallswinkel  $\alpha_0$  [ $\angle(\mathbf{k}_0 z) = \alpha_0$ ] auf das Gitter.  $E_A$  sei zu den Gitterdrähten parallel.

Die Beugungsaufgabe wird in folgender Weise gelöst. Man denke sich die einfallende Welle ungestört durch das Gitter hindurchgehend. Sie

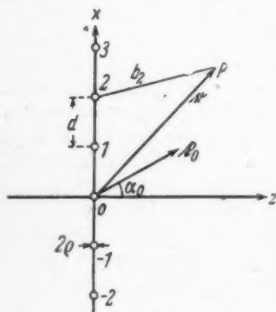


Abb. 3

<sup>4)</sup> Die Wellennormale der einfallenden Welle soll jedoch auf den Gitterdrähten senkrecht stehen.

induziert in den Gitterdrähten Ströme, die zu den Drahtachsen parallel fließen. Die von den Gitterströmen hervorgerufene Sekundärwelle  $E_G$  überlagert sich der einfallenden Welle. Im Bereiche der kurzen elektrischen Wellen darf man die Leitfähigkeit der metallischen Gitterdrähte in erster Näherung als unendlich groß annehmen. Die Gitterströme sind deshalb so zu bestimmen, daß die Tangentialkomponente der resultierenden elektrischen Feldstärke  $E_A + E_G$  an der Oberfläche der Gitterdrähte verschwindet:

$$E_{tg} = 0 \text{ an der Oberfläche aller Gitterdrähte.} \quad (6)$$

Wir setzen voraus, daß der Durchmesser  $2\rho$  der kreiszylindrischen Gitterdrähte klein ist im Vergleich zur Gitterkonstanten  $d$  und zur Wellenlänge  $\lambda$ :

$$2\rho \ll d, \quad (7a)$$

$$2\rho \ll \lambda. \quad (7b)$$

Hieraus und aus der Tatsache, daß das Gitter allseitig unbegrenzt ist, folgt: der Strom in jedem Gitterdraht  $n$  ist annähernd gleichförmig über den Drahtumfang verteilt und kann deshalb hinsichtlich seiner Wirkung außerhalb des Drahtes durch einen Stromfaden der Stromstärke  $J_n$  in der Drahtachse ersetzt werden.  $J_n$  ist von der Koordinate  $y$  unabhängig. Kein Gitterdraht darf vor dem anderen ausgezeichnet sein; daher müssen die Amplituden aller Stromfäden einander gleich sein. Aus dem gleichen Grunde müssen alle Ströme mit der gleichen Phasendifferenz gegeneinander schwingen, mit der sie von der einfallenden Welle  $E_A$  getroffen werden. Somit folgt notwendig:

$$J_n = J_0 e^{j(\omega t - k n d \sin \alpha_0)}. \quad (8)$$

Das Beugungsproblem reduziert sich also auf die Aufgabe,  $J_0$  als Funktion von  $E_0$ ,  $\lambda$ ,  $d$ ,  $\rho$  und  $\alpha_0$  zu berechnen. Die Grenzbedingung (6) liefert die Bestimmungsleichung für diesen Zusammenhang.

Für das von den Gitterströmen  $J_n$  im Aufpunkte  $P$  hervorgerufene elektrische Feld berechnet man (in elektrost. Einheiten)

$$E_G(P) = -\frac{\pi \omega}{c^2} J_0 e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j n k d \sin \alpha_0} H_0^{(2)}(k b_n). \quad (9)$$

Hierin bedeuten:

- $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,
- $H_0^{(2)}(x)$  die 2. Hankelsche Zylinderfunktion nullter Ordnung,
- $b_n$  den Abstand des Aufpunktes  $P$  vom  $n$ -ten Gitterdraht.

$E_G$  ist den Gitterdrähten parallel gerichtet.

Speziell ist in einem Aufpunkte  $P'$  auf der Oberfläche des  $n'$ -ten Gitterdrahtes wegen der Voraussetzung (7a)

$$b_n = \begin{cases} \rho & \text{für } n = n' \\ |n - n'| d & \text{für } n \neq n' \end{cases} \quad (10)$$

und somit (nach Umbenennung des Summationsbuchstabens und Zusammenfassung der Summenglieder  $n = |n|$  und  $n = -|n|$ )

$$E_G(P') = -\frac{2\pi\omega}{c^2} J_0 e^{j\omega t} e^{-jn'kd \sin \alpha_0} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nkd \sin \alpha_0) H_0^{(2)}(nkd) + \frac{1}{2} H_0^{(2)}(k\rho) \right]. \quad (11)$$

Setzt man noch voraus, daß  $k\rho \ll 1$  ist, also

$$2\pi\rho \ll \lambda, \quad (12)$$

so darf  $H_0^{(2)}(k\rho)$  durch den asymptotischen Wert<sup>\*)</sup>

$$H_0^{(2)}(k\rho) \rightarrow 1 - \frac{2j}{\pi} \ln \frac{\gamma k\rho}{2} \quad (13)$$

( $\gamma = 1,781 \dots$  = Eulersche Konstante)

für kleines Argument ersetzt werden. Die Hankelsche Funktion  $H_0^{(2)}(x)$  hängt mit der Besselschen Funktion  $I_0(x)$  und der Neumannschen Funktion  $N_0(x)$  durch die Gleichung

$$H_0^{(2)}(x) = I_0(x) - jN_0(x) \quad (14)$$

zusammen. Wie im 4. Abschnitt gezeigt werden wird, lassen sich die Reihen

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nkd \sin \alpha_0) I_0(nkd), \quad (15)$$

$$C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nkd \sin \alpha_0) N_0(nkd) \quad (16)$$

durch eine Funktion  $G\left(\frac{\lambda}{d}, \sin \alpha_0\right)$  bzw.  $M\left(\frac{\lambda}{d}, \sin \alpha_0\right)$  ausdrücken:

$$C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left( \frac{1}{\cos \alpha_0} + G \right), \quad (17)$$

$$C_2 = -\frac{\lambda}{2\pi d} M - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}. \quad (18)$$

Mit den Gln. (13) bis (18) folgt aus Gl. (11)

$$E_G(P') = -J_0 e^{j\omega t} \cdot e^{-jn'kd \sin \alpha_0} \cdot \left[ \frac{2\pi}{c d} \left( \frac{1}{\cos \alpha_0} + G \right) + j \left( \frac{2\pi}{c d} M + \frac{2\omega}{c^2} \ln \frac{d}{2\pi\rho} \right) \right]. \quad (19)$$

Das elektrische Feld der einfallenden Welle besitzt in der Achse des  $n'$ -ten Gitterdrahtes — und wegen der Voraussetzung (7b) näherungsweise auch auf seiner Oberfläche — die Tangentialfeldstärke

$$E_A(P') = E_0 e^{j\omega t - jn'kd \sin \alpha_0}. \quad (20)$$

Die Grenzbedingung (6) liefert also

$$\frac{E_0}{J_0} = \frac{2\pi}{c d} \left( \frac{1}{\cos \alpha_0} + G \right) + j \left( \frac{2\pi}{c d} M + \frac{2\omega}{c^2} \ln \frac{d}{2\pi\rho} \right) = R + j\omega L = Z. \quad (21)$$

<sup>\*)</sup> Vgl. z. B. E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 3. Aufl. Berlin 1936, S. 72.



Der Quotient  $Z = \frac{E_0}{J_0}$  kann als „Widerstand des Gitters pro Längeneinheit“ aufgefaßt werden (vgl. Wessel a. a. O.). Im 4. Abschnitt wird gezeigt, daß

$$G = 0 \quad \text{für } \lambda > d(1 + \sin \alpha_0) \quad (22)$$

ist. Die numerische Auswertung liefert außerdem  $M \ll \frac{2d}{\lambda} \ln \frac{d}{2\pi\varrho}$ , also

$$\frac{2\pi}{cd} M \ll \frac{2\omega}{c^2} \ln \frac{d}{2\pi\varrho} \quad \text{für } \lambda \gg d(1 + \sin \alpha_0). \quad (23)$$

Im Falle  $\lambda \gg d(1 + \sin \alpha_0)$  sind also der „Strahlungswiderstand pro cm“

$$R = \frac{2\pi}{cd \cos \alpha_0} = R_\infty \quad (24)$$

und die „Selbstinduktion pro cm“

$$L = \frac{2}{c^2} \ln \frac{d}{2\pi\varrho} \quad (25)$$

unabhängig von  $\lambda$ .  $R$  und  $\omega L$  sollen auf  $R_\infty$  bezogen werden:

$$\frac{R}{R_\infty} = 1 + G \cos \alpha_0, \quad (27)$$

$$\frac{\omega L}{R_\infty} = \cos \alpha_0 \left( M + \frac{2d}{\lambda} \ln \frac{d}{2\pi\varrho} \right). \quad (26)$$

### 3. Durchlässigkeit des Gitters. Intensität der Beugungswellen

Das Sekundärfeld  $E_G$  der Gitterströme in großer Entfernung vom Gitter kann ähnlich wie bei Wessel (a. a. O.) durch Grenzübergänge aus der Gl. (9) hergeleitet werden. Wir machen das Ergebnis durch die folgenden einfachen Überlegungen plausibel. Aus der Voraussetzung, daß das Gitter unendlich ausgedehnt ist, folgt: in hinreichend großer Entfernung können vom Gitter nur ebene Wellen  $E_G^{(i)}$  unter bestimmten Winkeln  $\alpha_i$  auslaufen. Die Winkel  $\alpha_i$  sind durch die Gl. (3) der elementaren Beugungstheorie gegeben. In hinreichendem Abstand vom Gitter ist die Wirkung der einzelnen stromdurchflossenen Gitterdrähte beliebig genau zu ersetzen durch die mit der Flächenstromdichte

$$J_f = \frac{J_0}{d} e^{j\omega t - jk y \sin \alpha_0} \quad (28)$$

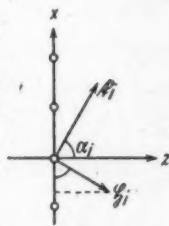


Abb. 4

kontinuierlich belegte Gitterebene. Da die zum Flächenstrom  $J_f$  tangentielle Komponente des magnetischen Feldes  $H_{t_0} = H \cos \alpha_i$  (Abb. 4), beim Durchgang durch die Gitterebene um den Betrag  $\frac{4\pi}{c} J_f$  springt<sup>\*)</sup>, ist die Amplitude der magnetischen Feldstärke — und im benutzten Maßsystem auch die der elektrischen Feldstärke —

<sup>\*)</sup> Vgl. z. B. J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik, Bd. II. Berlin 1928, S. 15.

zu beiden Seiten der Gitterebene gleich  $\frac{2\pi}{c} J_i$ . Unter Berücksichtigung des Vorzeichens folgt somit für die Beugungswelle  $E_G^{(i)}$  in großer Entfernung vom Gitter

$$E_G^{(i)} = -\frac{2\pi}{c} \frac{J_0}{d \cos \alpha_i} e^{j\omega t - j(l_i x)} \quad (29)$$

$$(|l_i| = k = \frac{2\pi}{\lambda}; \angle(l_i, z) = \alpha_i).$$

Die Durchlässigkeit des Gitters in Einfallrichtung ( $\alpha_i = \alpha_0$ ) erhält man aus den Gln. (29), (24) und (21):

$$D = \frac{|E_A + E_G^{(0)}|^2}{|E_A|^2} = \frac{|E_0 - R_\infty J_0|^2}{E_0^2} = \left| 1 - \frac{R_\infty}{Z} \right|^2,$$

$$D = \frac{(R/R_\infty - 1)^2 + (\omega L/R_\infty)^2}{(R/R_\infty)^2 + (\omega L/R_\infty)^2}. \quad (30)$$

Die Intensität der  $i$ -ten Beugungswelle ist

$$|E_G^{(i)}|^2 = \left( \frac{2\pi}{c d \cos \alpha_i} \right)^2 |J_0|^2 = R_\infty^2 \cdot \frac{E_0^2}{|Z|^2} \cdot \frac{(\cos \alpha_0)^2}{(\cos \alpha_i)^2},$$

$$|E_G^{(i)}|^2 = E_0^2 \frac{\left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_i} \right)^2}{(R/R_\infty)^2 + (\omega L/R_\infty)^2}. \quad (31)$$

#### 4. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n k d \sin \alpha_0) H_0^{(2)}(n k d)$ . Numerisches

Für große Wellenlängen,  $\lambda \gg d(1 + \sin \alpha_0)$ , ist die entwickelte Theorie ohne weiteres auch numerisch auswertbar. In diesem Falle sind (Gln. (24) und (25))

$$\frac{R}{R_\infty} = 1,$$

$$\frac{\omega L}{R_\infty} = \frac{2d}{\lambda} \cos \alpha_0 \cdot \ln \frac{d}{2\pi \varrho}.$$

Ist die Wellenlänge von gleicher Größenordnung wie die Gitterkonstante oder kleiner als sie, so bestimmen die Funktionen  $G\left(\frac{\lambda}{d}, \sin \alpha_0\right)$  und  $M\left(\frac{\lambda}{d}, \sin \alpha_0\right)$  das Verhalten des Gitters. Nach einer noch unveröffentlichten Arbeit von Hermann Schmidt-Jena gelten unter den Voraussetzungen

$$x \geq \eta \quad \text{und} \quad 0 < \eta < \pi \quad (32)$$

die folgenden Reihentransformationsformeln:

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\eta) I_0(n x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - \eta^2}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{\Re_n^+} + \frac{1}{\Re_n^-} \right), \quad (33)$$

$$C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\eta) N_0(n x) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n\pi} - \sum_{n=p+1}^{\infty} \left( \frac{1}{\Re_n^+} + \frac{1}{\Re_n^-} - \frac{1}{n\pi} \right) - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{4\pi}. \quad (34)$$



wenn  $x$  im Intervall

$$p \, 2\pi + \eta < x < (p+1) \, 2\pi - \eta \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (35)$$

liegt, und

$$C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - \eta^2}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{\Re_n^+} + \frac{1}{\Re_n^-} \right) + \frac{1}{\Re_{p+1}^-}, \quad (36)$$

$$C_2 = -\frac{1}{\Re_{p+1}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{1}{n\pi} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{\Re_n^+} + \frac{1}{\Re_n^-} - \frac{1}{n\pi} \right) - \frac{1}{\pi} \ln \frac{x}{4\pi}, \quad (37)$$

wenn  $x$  im Intervall

$$(p+1) \, 2\pi - \eta < x < (p+1) \, 2\pi + \eta \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (38)$$

liegt. Zur Abkürzung ist

$$|\sqrt{(n \, 2\pi \pm \eta)^2 - x^2}| = \Re_n^{\pm}$$

gesetzt.

Ist  $x \geq \eta$  und  $\eta > \pi$ , so sind die Fälle

$$\nu \, 2\pi < \eta' < (\nu + \frac{1}{2}) \, 2\pi \quad (40)$$

und

$$(\nu + \frac{1}{2}) \, 2\pi < \eta'' < (\nu + 1) \, 2\pi \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (41)$$

zu unterscheiden. Im Falle (40) führt man

$$\eta = \eta' - \nu \, 2\pi \quad (42)$$

und im Falle (41)

$$\eta = (\nu + 1) \, 2\pi - \eta'' \quad (43)$$

ein. Dann sind  $\cos(n \, \eta') = \cos(n \, \eta)$  und  $\cos(n \, \eta'') = \cos(n \, \eta)$  und die Voraussetzungen (32) für die Anwendbarkeit der Transformationsformeln (33) bis (38) erfüllt.

Setzt man  $x = k d = \frac{2\pi d}{\lambda}$  und  $\eta = k d \sin \alpha_0 = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \alpha_0$ , so entspricht den Intervallaufteilungen (35), (38), (40) und (41) eine Aufteilung der  $\frac{\lambda}{d} - \alpha_0$ -Ebene in Gebiete, die wir mit  $a'_{p\nu}$ ,  $b'_{p\nu}$  und  $a''_{p\nu}$ ,  $b''_{p\nu}$  bezeichnen wollen. Nach (40) ist in den Gebieten

$$\left. \begin{matrix} a'_{p\nu} \\ b'_{p\nu} \end{matrix} \right\} : \quad \frac{\sin \alpha_0}{\nu + \frac{1}{2}} < \frac{\lambda}{d} < \frac{\sin \alpha_0}{\nu}, \quad (40a)$$

und zwar nach (35) und (38) unter Berücksichtigung von Gl. (42) in

$$a'_{p\nu} : \quad \frac{1 + \sin \alpha_0}{p + \nu + 1} < \frac{\lambda}{d} < \frac{1 - \sin \alpha_0}{p - \nu}, \quad (p \geq \nu) \quad (35a)$$

$$b'_{p\nu} : \quad \frac{1 - \sin \alpha_0}{p - \nu + 1} < \frac{\lambda}{d} < \frac{1 + \sin \alpha_0}{p + \nu + 1}, \quad (p \geq \nu) \quad (38a)$$

Ebenso gilt nach (41) in den Gebieten

$$\left. \begin{matrix} a''_{p\nu} \\ b''_{p\nu} \end{matrix} \right\} : \quad \frac{\sin \alpha_0}{\nu + 1} < \frac{\lambda}{d} < \frac{\sin \alpha_0}{\nu + \frac{1}{2}}, \quad (41a)$$

und zwar nach (35) und (38) mit Rücksicht auf Gl. (43) in

$$a''_{p\nu} : \quad \frac{1 - \sin \alpha_0}{p - \nu} < \frac{\lambda}{d} < \frac{1 + \sin \alpha_0}{p + \nu + 1}, \quad (p > \nu) \quad (35b)$$

$$b''_{p\nu} : \quad \frac{1 + \sin \alpha_0}{p + \nu + 2} < \frac{\lambda}{d} < \frac{1 - \sin \alpha_0}{p - \nu}, \quad (p \geq \nu) \quad (38b)$$

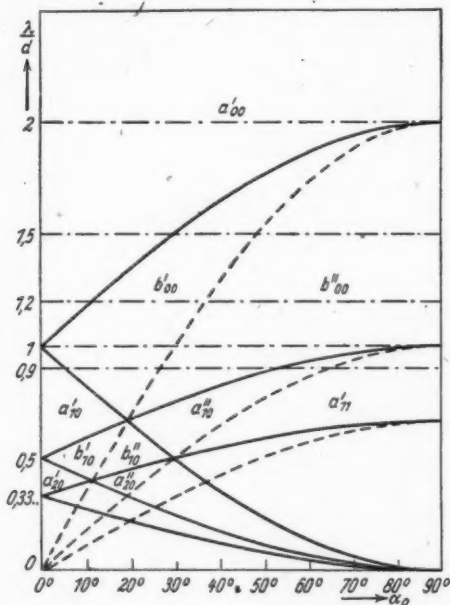


Abb. 5. Aufteilung der  $\frac{\lambda}{d} - \alpha_0$ -Ebene in die Gebiete  $a'_{p\nu}$ ,  $b'_{p\nu}$ ,  $a''_{p\nu}$ ,  $b''_{p\nu}$

In der Abb. 5 sind die Gebiete  $a'_{p\nu}$  und  $b'_{p\nu}$  durch die gestrichelt gezeichneten Kurven  $\frac{\lambda}{d} = \frac{\sin \alpha_0}{\nu}$  und  $\frac{\lambda}{d} = \frac{\sin \alpha_0}{\nu + \frac{1}{2}}$  von den Gebieten  $a''_{p\nu}$  und  $b''_{p\nu}$  abgegrenzt. Die Gebietsgrenzen  $\frac{\lambda}{d} = \frac{1 \pm \sin \alpha_0}{\mu}$  ( $\mu = 1, 2, 3, \dots$ ) sind durch die ausgezogenen Kurven dargestellt.

Mit der Abkürzung

$$r_x = \left| \sqrt{\left( x \frac{\lambda}{d} \pm \sin \alpha_0 \right)^2 - 1} \right| \quad (44)$$

( $x = \dots, -1, 0, 1, \dots$ )

gelten in den einzelnen Gebieten die folgenden Reihentransformationsformeln:

$$a'_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_p} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n-p}^+} + \frac{1}{r_{n+p}^+} \right) \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \sum_{n=1}^p \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+1}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n-p}^+} + \frac{1}{r_{n+p}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}; \end{cases} \quad (33a)$$

$$b'_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_p} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n-p}^+} + \frac{1}{r_{n+p}^+} \right) + \frac{1}{r_{p+p+1}^+} \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\frac{1}{r_{p-p+1}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n-p}^+} + \frac{1}{r_{n+p}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}; \end{cases} \quad (34a)$$

$$a''_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_{p+1}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} \right) \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \sum_{n=1}^p \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+1}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}; \end{cases} \quad (35a)$$

$$b''_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_{p+1}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} \right) + \frac{1}{r_{p-p}^+} \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\frac{1}{r_{p+p+2}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}. \end{cases} \quad (36a)$$

$$a''_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_{p+1}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} \right) + \frac{1}{r_{p-p}^+} \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\frac{1}{r_{p+p+2}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}. \end{cases} \quad (37a)$$

$$b''_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_{p+1}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} \right) + \frac{1}{r_{p-p}^+} \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\frac{1}{r_{p+p+2}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}. \end{cases} \quad (38a)$$

$$a''_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_{p+1}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} \right) + \frac{1}{r_{p-p}^+} \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\frac{1}{r_{p+p+2}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}. \end{cases} \quad (39a)$$

$$b''_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_{p+1}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} \right) + \frac{1}{r_{p-p}^+} \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\frac{1}{r_{p+p+2}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}. \end{cases} \quad (40a)$$

$$a''_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_{p+1}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} \right) + \frac{1}{r_{p-p}^+} \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\frac{1}{r_{p+p+2}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}. \end{cases} \quad (41a)$$

$$b''_{p\nu} : \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \frac{1}{r_{p+1}} + \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} \right) + \frac{1}{r_{p-p}^+} \right], \\ C_2 = \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\frac{1}{r_{p+p+2}^+} + \sum_{n=1}^{p+1} \frac{2d}{n\lambda} - \sum_{n=p+2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+p+1}^+} + \frac{1}{r_{n-p-1}^+} - \frac{2d}{n\lambda} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda}. \end{cases} \quad (42a)$$

Durch Vergleich der Gln. (17) und (18),

$$C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi d} \left( \frac{1}{\cos \alpha_0} + G \right),$$

$$C_2 = -\frac{\lambda}{2\pi d} M - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d}{2\lambda},$$

mit den entsprechenden Reihentransformationsformeln erhält man die Funktionen  $G\left(\frac{\lambda}{d}, \sin \alpha_0\right)$  und  $M\left(\frac{\lambda}{d}, \sin \alpha_0\right)$ . Für die Gebiete  $a'_{00}$ ,  $b'_{00}$ ,  $a'_{10}$  und  $b'_{00}$  (vgl. Abb. 5) sind  $G$  und  $M$  in der folgenden Tabelle 1 aufgeführt.

Die unendlichen Reihen in  $M$  lassen sich mit der Eulerschen Summenformel<sup>9)</sup> aufsummieren. Durch Entwicklung der Reihenglieder

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{\left(n\frac{\lambda}{d} + \sin \alpha_0\right)^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{\left(n\frac{\lambda}{d} - \sin \alpha_0\right)^2 - 1}} - \frac{2d}{n\lambda} \quad (n \geq 2) \quad (45)$$

in die binomische Reihe und gliedweise Differentiation beweist man, daß  $f(n)$  und alle Ableitungen  $f^{(k)}(n) = \frac{d^{(k)}f(n)}{dn^k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) mit wachsendem  $n$  ( $n \rightarrow +\infty$ )

<sup>9)</sup> Wegen der Bedingungen  $p \geq \nu$  bzw.  $p > \nu$  in (35a), (38a), (35b) und (38b) muß der Ausdruck  $\frac{1}{r_{\pm}^+} = \frac{1}{\cos \alpha_0}$  in den Transformationsgleichungen für  $C_1$  stets auftreten.

<sup>9)</sup> Vgl. z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 3. Aufl. Berlin 1931, S. 536ff.

Tabelle 1

	$G$	$M$
$a'_{00}$	0	$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{r_1^+} + \frac{1}{r_1} - \frac{2d}{\lambda} \\ \frac{1}{r_1^+} - \frac{2d}{\lambda} \end{array} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_n^+} + \frac{1}{r_n} - \frac{2d}{n\lambda} \right)$
$b'_{00}$	$\frac{1}{r_1}$	
$a'_{10}$	$\frac{1}{r_1^+} + \frac{1}{r_1}$	$-\frac{2d}{\lambda}$
$b''_{00}$	$\frac{1}{r_1}$	$\frac{1}{r_2} - \frac{2d}{\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{2d}{n\lambda} \right)$

monoton gegen 0 streben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(n) = 0, \quad (46)$$

$$\text{sign}(f^{(k)}(n)) = \text{sign}(-1)^k. \quad (47)$$

Die Erfüllung der Bedingungen (46) und (47) erlaubt, die Eulersche Summenformel in der einfachen Form

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \int_2^{\infty} f(n) dn + \frac{1}{2} f(2) - \frac{\vartheta}{12} f'(2) \quad (48)$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

zu schreiben<sup>9)</sup>, die eine bequeme Abschätzung des Restgliedes gestattet. Für den Näherungswert  $M' = M + \frac{\vartheta}{12} f'(2)$  errechnet man die in der Tabelle 2 angegebenen geschlossenen Ausdrücke. Es bedeutet  $u_n^{\pm} = n \frac{\lambda}{d} \pm \sin \alpha_0$ .

Es wurde der Verlauf von  $\frac{R}{R_{\infty}}$ ,  $\frac{\omega L}{R_{\infty}}$  und der Durchlässigkeit  $D$  des Gitters in Abhängigkeit von Einfallswinkel  $\alpha_0$  für verschiedene Verhältnisse der Wellenlänge zur Gitterkonstanten  $\left(\frac{\lambda}{d} = 5, 3, 2, 1.5, 1.2, 1, 0.9\right)$  und für je zwei Verhältnisse der Gitterkonstanten zum Drahtradius  $\left(\frac{d}{\varrho} = 20 \text{ und } \frac{d}{\varrho} = 40\right)$  berechnet, d. h. der Verlauf jener Größen längs den strichpunktierten Geraden in der  $\frac{\lambda}{d} - \alpha_0$ -Ebene in Abb. 5. Mit der Näherung  $M'$  für  $M$  berechnet man die Durchlässigkeit des

<sup>9)</sup> K. Knopp (a. a. O.) S. 552. — Gl. (48) ist im wesentlichen identisch mit der bekannten „Trapezformel“ (vgl. z. B.: R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd. I, 2. Aufl. Berlin 1930 S. 277ff). Ihre Herleitung aus der Eulerschen Summenformel könnte umständlich erscheinen, doch bietet dieser Weg die Möglichkeit, die Näherung durch Hinzunahme weiterer Glieder der Eulerschen Summenformel auf einfache Weise auch noch weiterzutreiben und den Vorteil einer unmittelbaren Fehlerabschätzung bei jeder Näherung.

Tabelle 2

	$M'$
$a'_{00}$	$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_1} - \frac{2d}{\lambda}$
$b'_{00}$	$\frac{1}{r_1'} - \frac{2d}{\lambda} + \frac{d}{\lambda} \left[ 2 \ln \frac{4\lambda}{d} - (\operatorname{Ar} \operatorname{Cof} u_2^+ + \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} u_2^-) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_2'} + \frac{1}{r_2} - \frac{d}{\lambda} \right)$
$a'_{10}$	$-\frac{2d}{\lambda}$
$b'_{00}$	$\frac{1}{r_2} - \frac{2d}{\lambda} + \frac{d}{\lambda} \left[ 2 \ln \frac{4\lambda}{d} - (\operatorname{Ar} \operatorname{Cof} u_2^- + \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} u_1^+) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1'} - \frac{d}{\lambda} \right)$

Gitters ausreichend genau. Der relative Fehler übersteigt 1% nur in der Nähe der Grenze der Gebiete  $b'_{00}$  und  $b'_{00}$ . In der Abb. 6 ist der in der Näherung (12) von Drahtradius  $\varrho$  unabhängige

Strahlungswiderstand  $\frac{R}{R_\infty}$  gezeichnet. Abb. 7 zeigt den Verlauf von  $\frac{\omega L}{R_\infty}$  für  $\frac{d}{\varrho} = 40$ .

Bemerkenswert ist das Unendlichwerden der Funktion  $C_1$  oder  $C_2$  und damit von  $\frac{R}{R_\infty}$  oder  $\frac{\omega L}{R_\infty}$  an den Stellen

$$r_\pm = \left| \sqrt{\left( \frac{\lambda}{d} \pm \sin \alpha_0 \right)^2 - 1} \right| = 0, \quad (49)$$

also längs den ausgezogenen Kurven  $\frac{\lambda}{d} = \frac{1 \pm \sin \alpha_0}{\mu}$  ( $\mu = 1, 2, 3, \dots$ ) in der Abb. 5. Man findet das merkwürdige, „komplementäre“ Verhalten von  $\frac{R}{R_\infty}$  und  $\frac{\omega L}{R_\infty}$ , auf das bereits Wessel (a. a. O.) hingewiesen hat: bei Annäherung an eine der ausgezogenen Grenzkurven (Abb. 5) bleibt entweder  $\frac{R}{R_\infty}$  endlich,

während  $\frac{\omega L}{R_\infty}$  über alle Grenzen wächst oder umgekehrt. Nähert man sich derselben Grenzkurve vom

Nachbargebiet her, so verhalten sich  $\frac{R}{R_\infty}$  und  $\frac{\omega L}{R_\infty}$  komplementär zueinander, d. h.

es bleibt entweder  $\frac{\omega L}{R_\infty}$  endlich, während  $\frac{R}{R_\infty}$  über alle Grenzen wächst bzw. umgekehrt. Längs den ausgezogenen Grenzkurven ist also der komplexe Widerstand  $Z$

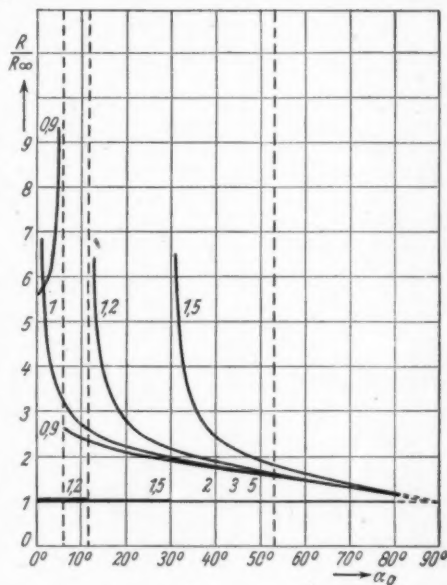


Abb. 6. Realteil  $\frac{R}{R_\infty}$  des Gitterwiderstandes in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\alpha_0$  für  $\frac{\lambda}{d} = 5, 3, 2, 1.5, 1.2, 1, 0.9$

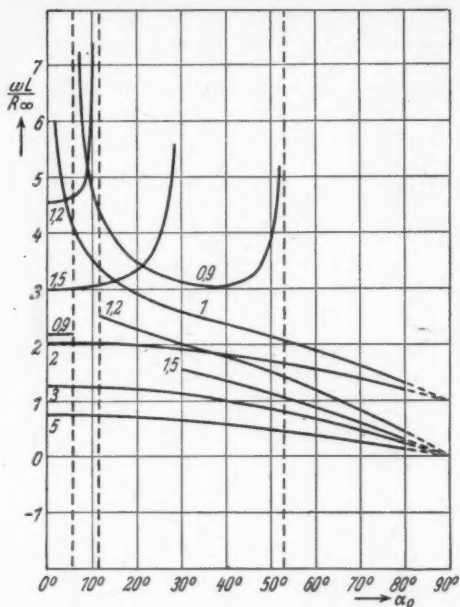


Abb. 7. Imaginärteil  $\frac{\omega L}{R_{\infty}}$  des Gitterwiderstandes in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\alpha_0$ , für  $\frac{\lambda}{d} = 5, 3, 2, 1.5, 1.2, 1, 0.9$  und  $\frac{d}{\rho} = 40$

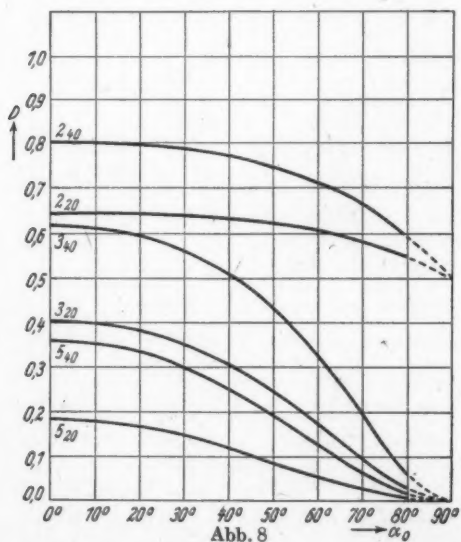


Abb. 8

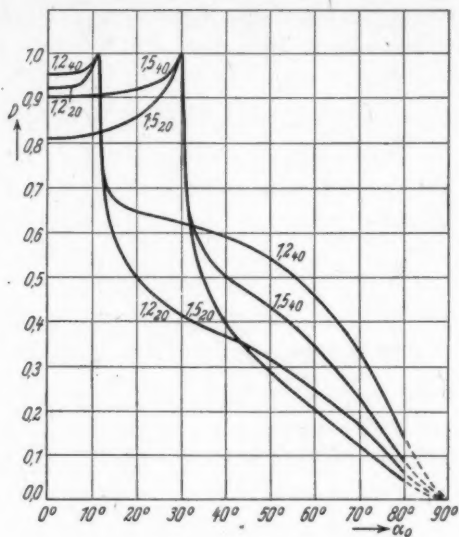


Abb. 9

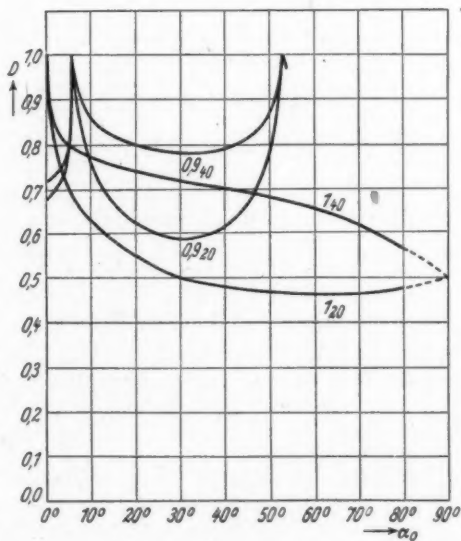


Abb. 10

Abb. 8, 9, 10. Berechnete Durchlässigkeit  $D$  eines unendlichen Gitters in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\alpha_0$  für  $\frac{\lambda}{d} = 5, 3, 2; 1,5, 1,2; 1, 0,9$  ( $\frac{d}{\rho} = 20$  und  $40$ )



des Gitters unendlich groß; in den Gitterdrähten können infolgedessen keine Ströme fließen, die Durchlässigkeit des Gitters (Abb. 8, 9 und 10) ist längs den Kurven  $\frac{\lambda}{d} = \frac{1 \pm \sin \alpha_0}{\mu}$  gleich 1.

Neben dieser rein formalen Begründung für die vollständige Durchlässigkeit eines Gitters aus dünnen Drähten an den Stellen  $\frac{\lambda}{d} = \frac{1 \pm \sin \alpha_0}{\mu}$  läßt sich auch leicht eine mehr anschauliche Erklärung finden. Aus Gl. (3) und der Beziehung  $\frac{\lambda}{d} = \frac{1 \pm \sin \alpha_0}{\mu}$  folgt nämlich

$$\sin \alpha_i = \sin \alpha_0 - \frac{i}{\mu} (1 \pm \sin \alpha_0), \quad (50)$$

d. h. an den kritischen Stellen existieren unter anderen auch immer Beugungswellen  $i = \pm \mu$ , für welche  $\sin \alpha_i = \mp 1$ , also  $\alpha_i = \mp \frac{\pi}{2}$  ist. Beugungswellen, die das Gitter streifend verlassen, würden im Grenzfalle  $\alpha_i = \pm \frac{\pi}{2}$  eine unendlich große räumliche Energiedichte besitzen, was durch das Verschwinden der Gitterströme verhindert wird. In Übereinstimmung hiermit verschwinden nach Gl. (31) für  $\frac{\lambda}{d} = \frac{1 \pm \sin \alpha_0}{\mu}$  auch alle übrigen Beugungswellen.

Von Interesse ist noch die Durchlässigkeit des Gitters für streifenden Einfall. Die Durchlässigkeit geht für  $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  überall dort gegen 0, wo  $G$  und  $M$  endlich bleiben, denn dann sind nach den Gln. (26) und (27)  $\frac{R}{R_\infty} = 1$  und  $\frac{\omega L}{R_\infty} = 0$ , so daß aus Gl. (30)  $D = 0$  folgt. An den Stellen  $\frac{\lambda}{d} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2}}{\mu} = \frac{2}{\mu}$  jedoch wird je nach dem Gebiet, aus dem man sich der Stelle  $\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{\mu}$  nähert, in der Grenze  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  entweder  $\frac{\omega L}{R_\infty} = 1$  und  $\frac{R}{R_\infty} = 1$  oder  $\frac{\omega L}{R_\infty} = 0$  und  $\frac{R}{R_\infty} = 2$  und somit die Durchlässigkeit  $D = \frac{1}{2}$  bzw.  $D = \frac{1}{4}$ , und zwar unabhängig vom Drahtradius (vgl. hierzu die Durchlässigkeitskurven für  $\frac{\lambda}{d} = 2$  und  $\frac{\lambda}{d} = 1$  in den Abbn. 8 und 10).

### 5. Experimentelle Prüfung der Theorie

Wie in der Einleitung gezeigt wurde, ist das Problem der Beugung einer  $H_{m0}$ -Rohrwellen im rechteckigen Rohr an einem ebenen Drahtgitter äquivalent mit dem der Beugung einer linear polarisierten, ebenen Transversalwelle an einem unendlich ausgedehnten Gitter. Es ist also möglich, die entwickelte Beugungstheorie mit  $H_{m0}$ -Rohrwellen experimentell zu prüfen.

Die Verwendung von Rohrwellen an Stelle von freien Raumwellen bietet vom experimentellen Standpunkte aus zwei Vorteile: 1. Das gesamte elektromagnetische Feld befindet sich im Innern eines vollständig abgeschlossenen Rohres. Störende Reflexionen der Wellen an den Zimmerwänden oder an Gegenständen in der Umgebung der Apparatur, die Anlaß zu unübersichtlichen Interferenzfeldern<sup>10)</sup> geben

<sup>10)</sup> Vgl. hierzu: A. Esau, E. Ahrens, W. Kebbel, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. 53, 113 (1939).

und die Meßergebnisse stark fälschen können, werden von vornherein vermieden. 2. Die Metallwände des Rohres verhalten sich gegenüber kurzen elektrischen Wellen wie vollkommen reflektierende Spiegel; d. h. ein Gitter im Rohr realisiert ein unendlich ausgedehntes Gitter. Fehler, die von der Beugung freier Wellen am Rande eines endlich ausgedehnten Gitters herrühren, entfallen daher in der benutzten Anordnung. — Ein Nachteil der Rohrwellenmethode ist, daß die Parameter  $\frac{\lambda}{d}$  und  $\alpha_0$  nicht von einander unabhängig gewählt werden können, sondern gemäß den Gln. (1) und (2) durch die Beziehung

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{2l}{m} \sin \alpha_0 \quad (51)$$

miteinander verknüpft sind. Eine experimentelle Prüfung der Theorie bei gegebenem Wellentyp  $m$  und fester Zahl  $l$  der Gitterdrähte im Rohr ist also nur längs den Kurven  $\frac{\lambda}{d} = \frac{2l}{m} \sin \alpha_0$  in der  $\frac{\lambda}{d}$ - $\alpha_0$ -Ebene (Abb. 5) möglich. Zwar kann grundsätzlich durch passende Wahl von  $l$  und  $m$  jeder Punkt der  $\frac{\lambda}{d}$ - $\alpha_0$ -Ebene beliebig genau erreicht werden, doch sind praktisch nur die  $H_{m0}$ -Rohrwellen der niedrigsten Ordnungen  $m$  genügend rein zu erhalten.

Abb. 11 erläutert das Prinzip der Meßmethode. Sie stellt einen Längsschnitt durch das rechteckige Rohr dar. Die kleine Antenne  $S$  erregt eine im Rohr nach links und rechts fortschreitende  $H_{10}$ -Welle. Der eingezeichnete Pfeil  $\mathcal{E}$  gibt die Richtung des elektrischen Feldes an. Die  $H_{10}$ -Welle durchstrahlt bei  $G$  das Drahtgitter und wird von ihm zum Teil reflek-

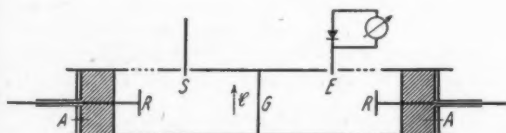


Abb. 11. Schematische Darstellung der Meßanordnung

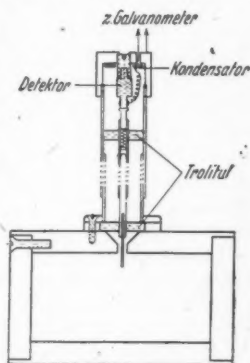


Abb. 12. Empfangsantenne mit Detektor

tiert und zum Teil durchgelassen. Reflektierte und durchgelassene Welle werden von den Absorbern  $A$  an den beiden Enden des Rohres vollständig absorbiert. Ein kleiner Bruchteil der vom Gitter durchgelassenen Strahlungsintensität wird von der Antenne  $E$  empfangen und einem Detektor zugeleitet. Bei kleinen Strömen ist der Richtstrom durch den Detektor ein Maß für die vom Gitter durchgelassene Strahlungsintensität. Der Quotient aus den Galvanometerströmen mit und ohne Gitter ergibt die Durchlässigkeit.

Das rechteckige Rohr bestand aus 10 mm dicken, miteinander verschraubten Aluminiumplatten und hatte einen lichten Querschnitt von  $4 \cdot 8 \text{ cm}^2$  (Abb. 12). Zwei je 50 cm lange Rohrstücke waren mit Reitern auf einer Zeißscheibe fest montiert. Die beiden einander zugewandten Enden ließen einen 12 mm breiten Zwischenraum frei, in den Rahmen mit und ohne Gitterdrähte in den Strahlen-

gang geschoben werden konnten. Die beiden Rohrenden konnten mittels Schrauben fest an den Rahmen gepreßt werden, um Übergangswiderstände möglichst herabzumindern, doch erwies sich diese Maßnahme bei den Messungen als überflüssig. Abstände bis zu  $\frac{1}{2}$  mm zwischen Rahmen und einem Rohrende bewirkten keine merkliche zusätzliche Reflexion der  $H_{10}$ -Welle. Die einzelnen Gitterstäbe wurden in den Rahmen gepreßt oder durch Bohrungen im Rahmen gehalten. Ein Einfluß der Übergangswiderstände zwischen den Gitterdrähten und dem Rahmen auf die Reflexion wurde nicht beobachtet.

Sende- und Empfangsantenne waren 16 cm von der Gitterebene entfernt durch 4-mm-Bohrungen in das Rohr eingeführt. Sie bestanden aus 0,8 mm dicken Messingstiften, die bei den endgültigen Messungen 6 mm tief in das Rohrinne hineingragten (Abb. 12). Die Sendeantenne  $S$  wurde über ein flexibles, konzentrisches Kabel von einem Magnetron gespeist. Der Anschluß des abstimmbaren Detektors (Siliziumkristall und Wolframspitze) an die Empfangsantenne ist aus Abb. 12 ersichtlich. Der Richtstrom wurde mit einem Galvanometer (Stromempfindlichkeit  $3,5 \cdot 10^{-9}$  Ampere/Skalenteil bei einem Innenwiderstand von  $1210 \Omega$ ) gemessen. Er betrug höchstens  $3 \cdot 10^{-7}$  Ampere, ein Wert, bei dem mit Sicherheit noch quadratische Gleichrichtung, also Anzeige proportional dem Zeitmittelwert des Quadrates der elektrischen Feldstärke gewährleistet ist.

Jeder der beiden Absorber  $A$  an den Enden des Rohres (Abb. 11) bestand aus einer im Rohr gut geführten Metallplatte, auf der eine 4,5 cm dicke Schicht von Wellpappe mit Zwischenlagen von berußtem Papier befestigt war. Vor jedem Absorber wurde von einem durchgehenden Metallstab ein dünnes, rechteckiges Blech  $R$  von etwa  $1 \cdot 3 \text{ cm}^2$  Querschnitt gehalten. Der Reflektor  $R$  konnte mit dem Metallstab um die Rohrachse gedreht und sein Abstand vom Absorber  $A$  verändert werden. Durch passende Einstellung dieser beiden Parameter läßt sich Reflexionsfreiheit des gesamten Absorbersystems ( $A + R$ ) erreichen. Die Reflexionsfreiheit wurde dadurch geprüft, daß bei einem Verschieben des ganzen Absorbersystems in Richtung der Rohrachse der Detektorstrom keine periodischen Schwankungen mehr zeigte, sich im Rohr also eine reine fortschreitende Welle ausgebildet hatte. Die Abstimmung des Reflektors  $R$  ist nicht sehr kritisch; die Welligkeit des Interferenzfeldes vor den Absorbern konnte leicht auf  $\pm 1,5\%$  des jeweiligen Detektorstromes vermindert werden.

Die Wellenlänge des Magnetrons (Telefunkenröhre RD 2 Md 2 im Felde eines Permanentmagneten) ließ sich von 8,4 bis 12,0 cm verändern. Die Wellenlänge wurde aus den Resonanzlängen einer konzentrischen Lecherleitung mit einer Genauigkeit von  $\pm 0,1$  mm bestimmt — Von allen in dem rechteckigen Rohr möglichen Wellentypen besitzt die  $H_{10}$ -Welle die längste Grenzwellenlänge:  $\lambda_g^{H_{10}} = 2a = 16 \text{ cm}$ . Die nächstlängsten Grenzwellenlängen<sup>11)</sup> sind die der  $H_{20}$ ,  $H_{01}$ ,  $H_{11}$ - und  $E_{11}$ -Rohrwellen; sie betragen

$$\lambda_g^{H_{20}} = \lambda_g^{H_{01}} = 8 \text{ cm und } \lambda_g^{H_{11}} = \lambda_g^{E_{11}} = 7,15 \text{ cm}$$

und sind kleiner als die kürzeste benutzte Wellenlänge (8,46 cm). Es konnte im Rohr also nur eine fortschreitende  $H_{10}$ -Welle auftreten. Die Abstände der Send- und Empfangsantenne und der Reflektoren  $R$  vom Drahtgitter  $G$  waren so groß bemessen, daß sich am Orte des Gitters praktisch nur das Feld der  $H_{10}$ -Welle befand.

<sup>11)</sup> Vgl. z. B. den Artikel von A. Riedinger in: Vilbig-Zenneck, Fortschritte der Hochfrequenztechnik Bd. I. Leipzig 1941, S. 187 ff.

Ein systematischer Fehler des Meßverfahrens könnte dadurch zustande kommen, daß sich die Eingangsimpedanzen der Sende- und Empfangsantenne durch das Einschleiben des reflektierenden Drahtgitters ändern. Deshalb wurde vor Beginn der Messungen durch sukzessives Verkürzen der in das Rohr hineinragenden Antennen geprüft, wann sich bei dem am stärksten reflektierenden Gitter ein konstanter Wert für die Durchlässigkeit ergab. Bei Antennenlängen unterhalb von 8 mm war eine Abhängigkeit der gemessenen Durchlässigkeiten von der Stärke der Einkopplung nicht mehr nachzuweisen.

Messungen wurden mit  $l = 1, 2$  und  $4$  im Rohr symmetrisch angeordneten Gitterdrähten ausgeführt. Die Drahtdurchmesser waren so gewählt, daß für jedes Gitter das Verhältnis der Gitterkonstanten zum Drahtradius  $\frac{d}{\rho} = 20, 40$  und  $80$  betrug.

Die Abbildungen 13, 14 und 15 zeigen die Meßergebnisse. Die ausgezogenen Kurven sind nach der Theorie berechnet. Dem Wellenlängenbereich  $8,46 < \lambda < 11,40$  cm entspricht nach Gl. (1) ( $m = 1$ ) ein Intervall des Einfallswinkels von  $31,9^\circ < \alpha_0 < 45,5^\circ$ . Bei Gittern mit 2 und 4 Drähten ist demnach  $\frac{\lambda}{d} > 1 + \sin \alpha_0$  (Gebiet

$a'_{00}$  in Abb. 5) und folglich  $\frac{R}{R_\infty} = 1$ . Die Durchlässigkeit ergibt sich nach Gl. (30) zu

$$D = \frac{\left(\frac{\omega L}{R_\infty}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega L}{R_\infty}\right)^2}. \quad (52)$$

Bei einem einzigen Gitterdraht ( $l = 1$ ,  $\frac{\lambda}{d} = 2 \sin \alpha_0 =$  Grenze der Gebiete  $b'_{00}$  und  $b''_{00}$  in Abb. 5) ist zu beachten, daß sich der in Einfallrichtung durchtretende Welle  $E_A + E_G^{(0)}$  im Rohr noch die Beugungswelle  $E_G^{(1)}$  (Gln. (3) und (29)) überlagert, die das Gitter unter dem Winkel  $\alpha_1 = -\alpha_0$  verläßt. In diesem Falle wird (vgl. Tabelle 1)

$$G = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{| \sqrt{(2 \sin \alpha_0 - \sin \alpha_0)^2 - 1} |} = \frac{1}{\cos \alpha_0}$$

und  $\frac{R}{R_\infty} = 2$ . Somit folgt die Durchlässigkeit zu

$$D = \frac{|E_A + E_G^{(0)} + E_G^{(1)}|^2}{|E_A|^2} = \left| 1 - 2 R_\infty \frac{1}{Z} \right|^2,$$

$$D = \frac{\left(\frac{\omega L}{R_\infty}\right)^2}{4 + \left(\frac{\omega L}{R_\infty}\right)^2}.$$

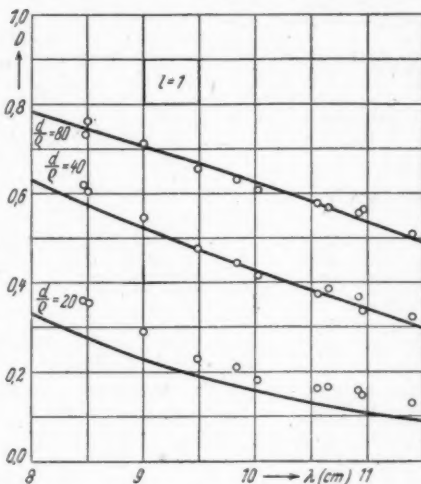


Abb. 13

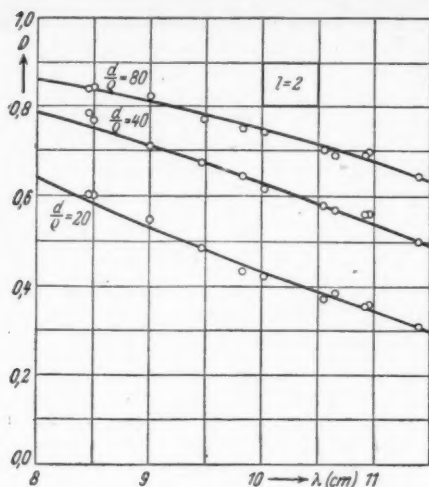


Abb. 14

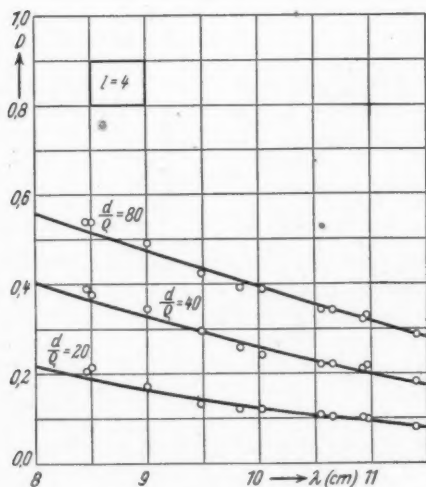


Abb. 15

Abb. 13, 14, 15. Gemessene Durchlässigkeit  $D$  eines Gitters aus einem ( $l=1$ ) Draht bzw.  $l=2$  und  $l=4$  Drähten für eine  $H_{10}$ -Welle in einem rechteckigen Rohr in Abhängigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$  (ausgezogene Kurven nach der Theorie berechnet)

Im allgemeinen stimmen die gemessenen Durchlässigkeiten innerhalb der Fehlergrenzen mit den nach der Theorie berechneten Werten überein. Die Meßpunkte für die Durchlässigkeitskurve  $l = 1$  und  $\frac{d}{\varrho} = 20$  ( $2\varrho = 8$  mm) in Abb. 13 liegen systematisch oberhalb der theoretischen Kurve, was ohne weiteres verständlich ist, da hier die Voraussetzung (12),  $2\pi\varrho \ll \lambda$ , nicht mehr erfüllt ist ( $2\pi\varrho = 2,52$  cm). — Die Messungen wurden in der Weise durchgeführt, daß die beiden Absorbersysteme für eine bestimmte Wellenlänge auf möglichst kleine Reflexion abgestimmt wurden und dann bei dieser Wellenlänge alle 9 Meßpunkte aufgenommen wurden. Hierin liegt wahrscheinlich der Grund für die zum Teil systematischen Abweichungen im Sinne zu großer oder zu kleiner Durchlässigkeiten bei ein und derselben Wellenlänge.

In Abb. 16 ist der Verlauf der Durchlässigkeiten dreier Gitter ( $l = 1, 2, 4$ ;  $\frac{d}{\varrho} = 80$ ) gegenüber einer  $H_{10}$ -Rohrwellen noch einmal für einen größeren Bereich des Einfallswinkels dargestellt. Abszisse ist das Verhältnis der Wellenlänge zur Grenzwellenlänge der  $H_{10}$ -Welle,  $\frac{\lambda}{\lambda_{g,10}} = \sin \alpha_0$ .

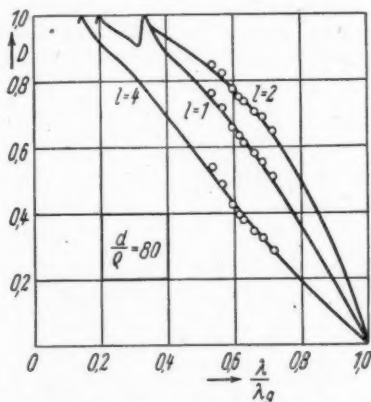


Abb. 16. Gemessene und berechnete Durchlässigkeit  $D$  dreier Gitter gegenüber einer  $H_{10}$ -Welle in einem rechteckigen Rohr in Abhängigkeit von  $\frac{\lambda}{\lambda_{g,10}}$ .

Frankfurt a. M., Physikal. Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 23. März 1948.)

# **Behandlung des Oszillators und der Diracschen Gleichungen** **Mitteilung III zu „Eine neue Behandlungs- und Darstellungsmethode** **wellenmechanischer Probleme“**

Von Hartmut Kallmann und Max Päsler

## **Inhaltsübersicht**

In vorliegender Arbeit sollen im Anschluß an zwei frühere Veröffentlichungen<sup>1)</sup> der Fall des Oszillators und die Integration der Diracschen Differentialgleichungen für die radialen Wellenfunktionen mit Hilfe der Laplace-Transformation durchgeführt werden. Es zeigt sich auch hier wieder die Überlegenheit, die die Anwendung der Laplace-Transformation auf solche Aufgaben mit sich bringt. Neben einer wesentlichen Vereinfachung der Rechnungen werden weitergehende Resultate gefunden werden, als sich bei der üblichen Behandlung ergeben; insbesondere läßt sich das Verhalten der Gesamtheit aller Lösungen sofort angeben.

## **I.**

Wir behandeln zunächst den Fall des Oszillators, dessen wellenmechanische Gleichung bekanntlich<sup>2)</sup> lautet:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2) \psi = 0 \quad \begin{cases} \alpha = \frac{m \omega_0}{\hbar} \\ \lambda = \frac{2mE}{\hbar^2} \end{cases} \quad (1,1)$$

Mit der Transformation

$$x^2 = \bar{y} \quad (1,2)$$

und

$$y = \alpha \bar{y} \quad (1,3)$$

geht (1,1) nach einiger Rechnung über in

$$\frac{4}{\alpha^2} \bar{y} \alpha \cdot \frac{d^2\psi}{d\bar{y}^2} + \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{d\psi}{d\bar{y}} + \left( \frac{\lambda}{\alpha} - \alpha \bar{y} \right) \psi = 0. \quad (1,4)$$

Führt man zur Abkürzung

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \mu = \frac{2E}{\hbar \omega_0} \quad (1,5)$$

ein, so schreibt sich (1,4)

$$4 y \frac{d^2\psi}{dy^2} + 2 \frac{d\psi}{dy} + (\mu - y) \psi = 0. \quad (1,6)$$

<sup>1)</sup> H. Kallmann und M. Päsler, Ann. Physik (6) **2**, 292 u. 305 (1948).

<sup>2)</sup> A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, S. 32, 1939, F. Vieweg, Braunschweig.



Unterwirft man die letzte Gleichung nun der Laplace-Transformation, so resultiert daraus

$$-4 \frac{d}{dp} [p^2 \varphi - p \psi_0 - \psi'_0] + 2p \varphi - 2\psi_0 + \mu \varphi + \frac{d\varphi}{dp} = 0, \quad (1,7)$$

in der die Größen  $\psi_0$  und  $\psi'_0$  die Anfangswerte von  $\psi$  und ihrer Ableitung bedeuten. Gleichung (1,7) ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung, die sich nach einfacher Umformung auf die Form

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{1}{4} \frac{\mu - 6p}{p^2 - \frac{1}{4}} \varphi + \frac{1}{2} \frac{\psi_0}{p^2 - \frac{1}{4}} \quad (1,8)$$

bringen läßt. Ihr allgemeines Integral lautet

$$\varphi = \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-3}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+3}{4}}} \left\{ C + \frac{\psi_0}{2} \int \frac{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-1}{4}}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+1}{4}}} dp \right\}, \quad (1,9)$$

wobei  $C$  die willkürliche Integrationskonstante ist. Wir betrachten zunächst solche Lösungen, deren Anfangswert

$$\psi_0 = 0 \quad (1,10)$$

ist. Sie sind gegeben durch

$$\varphi = C \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-3}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+3}{4}}}. \quad (1,11)$$

Wendet man auf dieses Ergebnis die in den früheren Arbeiten ständig gebrauchte Asymptotik an, so erkennt man, daß die Lösung  $\psi$  im Oberbereich im Unendlichen

wie  $e^{\frac{\mu}{2}}$  verläuft, sofern nicht der Exponent des Zählers eine ganze Zahl  $m \leq 0$  ist. Da von den Lösungen mit physikalischer Bedeutung ein Verschwinden im Unendlichen verlangt wird, muß also

$$\frac{\mu - 3}{4} = m \geq 0 \quad (1,12)$$

gelten, woraus für  $\mu$  die Bedingung

$$\mu = 4m + 3 > 0 \quad (1,13)$$

folgt. Beachtet man die Bedeutung von  $\lambda$  und  $\alpha$  gemäß (1,1), so ergibt sich für die Energie-Eigenwerte

$$E = \frac{4m + 3}{2} \hbar \omega_0. \quad (1,14)$$

Vergleicht man dies mit der bekannten Formel  $E = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0$ , so erkennt man, daß (1,14) nur die Eigenwerte mit ungeraden  $n$  wiedergibt. Wir müssen uns

nun noch davon überzeugen, daß die Oberfunktion zu (1,11) in der Tat für  $x=0$  verschwindet. Entwickelt man die Lösung (1,11) für große  $p$  nach  $\frac{1}{p}$ , so hat man

$$\varphi(p) \sim C \frac{p^{\frac{\mu-3}{4}} \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^{\frac{\mu-3}{4}}}{p^{\frac{\mu+3}{4}} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{\frac{\mu+3}{4}}} \approx C p^{-\frac{3}{2}} (1 + \dots). \quad (1,15)$$

Dem entspricht in der Oberfunktion ein Verlauf

$$\psi \sim C y^{\frac{1}{2}} \sim c x, \quad (1,16)$$

wiederum in Übereinstimmung mit dem bekannten Resultat, daß die Eigenfunktionen nur für ungerade  $n$  im Nullpunkt verschwinden.

Ist  $\psi_0 \neq 0$ , so liegt die Lösung (1,9) vor, die wir nochmals ausführlich aufschreiben:

$$\varphi(p) = C \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-3}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+3}{4}}} + \frac{\psi_0 \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-3}{4}}}{2 \left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+3}{4}}} \int_{p_c}^p \frac{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-1}{4}}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+1}{4}}} dp. \quad (1,17)$$

Dabei sind die Grenzen des Integrals zu  $p_c$  bzw.  $p$  angegeben. Die obere Grenze ist die Variable  $p$ , während die untere Grenze  $p_c$  eine, solange über  $C$  noch nicht verfügt ist, willkürliche, zweckmäßig zu wählende Konstante bedeutet. Wir führen in der nachfolgenden Rechnung zur Abkürzung für die Lösung der homogenen Gleichung (1,8) die Abkürzung  $H$  ein, setzen also

$$H(p) = \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-3}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+3}{4}}}. \quad (1,18)$$

Dann schreibt sich (1,17) in der Form

$$\varphi(p) = C H + \frac{\psi_0}{2} H \int_{p_c}^p \frac{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-1}{4}}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+1}{4}}} dp. \quad (1,19)$$

Der darin auftretende Integrand wird an der Stelle  $p = +\frac{1}{2}$  unendlich. Daß dieses Unendlichwerden nicht stört, sieht man am besten, wenn man partiell inte-

griert und wie folgt umformt. Eine partielle Integration liefert

$$-\int ( ) dp = \frac{(p + \frac{1}{2})^{\frac{\mu-1}{4}}}{(\frac{\mu+1}{4}-1)(p - \frac{1}{2})^{\frac{\mu+1}{4}-1}} - \frac{\frac{\mu-1}{4}}{(\frac{\mu+1}{4}-1)} \int \frac{(p + \frac{1}{2})^{\frac{\mu-1}{4}-1}}{(p - \frac{1}{2})^{\frac{\mu+1}{4}-1}} dp, \quad (1,20)$$

woraus man erkennt, daß sich der Exponent des Zählers und des Nenners um 1 erniedrigt hat [Gl. (1,20) nicht gültig für  $\frac{\mu-3}{4} \geq 0$  und ganzzahlig. Dazu s. S. 52]. Damit schreibt sich der zweite Teil der rechten Seite in (1,19):

$$\frac{\psi_0}{2} H \int ( ) dp = \frac{\psi_0}{2} \frac{A}{p + \frac{1}{2}} - B H \int \frac{(p + \frac{1}{2})^{\frac{\mu-1}{4}-1}}{(p - \frac{1}{2})^{\frac{\mu+1}{4}-1}} dp, \quad (1,21)$$

wobei  $A$  und  $B$   $\mu$ -enthaltende Konstanten sind, die durch den Integrationsprozeß auftreten. Integriert man das auf der rechten Seite stehende Integral weiterhin partiell aus, so erhält man für die Partikularlösung nach  $n$  Schritten ersichtlich nachstehende Form:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_0}{2} H \int ( ) dp &= \frac{\psi_0}{2} \left[ \frac{A}{p + \frac{1}{2}} + B \frac{(p - \frac{1}{2})}{(p + \frac{1}{2})^2} + D \frac{(p - \frac{1}{2})^2}{(p + \frac{1}{2})^3} + \dots \right] \\ &+ H \cdot F \int_{p_0}^p \frac{(p + \frac{1}{2})^{\frac{\mu-1}{4}-n}}{(p - \frac{1}{2})^{\frac{\mu+1}{4}-n}} dp, \end{aligned} \quad (1,22)$$

in der  $D$  und  $F$  weitere Konstante sind. Wählt man  $n$  groß genug, so kann man es stets erreichen, daß der Exponent des Nenners negativ wird, also die störende Nullstelle des Nenners verschwindet. Es nimmt dann das allgemeine Integral (1,17) die Form

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= C + K) H + \psi_0 \left\{ \frac{A}{p + \frac{1}{2}} + B \frac{p - \frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2} + \dots \right\} \\ &+ \frac{\psi_0}{2} H \cdot F \int_{p_0 = \frac{1}{2}}^p \frac{(p - \frac{1}{2})^{n - \frac{\mu+1}{4}}}{(p + \frac{1}{2})^{n - \frac{\mu-1}{4}}} dp \end{aligned} \quad (1,23)$$

an. Darin bedeutet  $K$  eine Konstante, die von der Wahl der unteren Grenzen bei der partiellen Integration abhängt. Jetzt können wir unbeschadet der Allgemeinheit als untere Grenze  $p_0 = \frac{1}{2}$  einsetzen, was in (1,23) bereits angedeutet wurde. Wir bemerken noch, daß der Exponent des Zählers größer als 0 ist. In dieser Funktion können wir

$$C + K = C' \quad (1,24)$$

beispielsweise  $= 0$  setzen, was erlaubt ist, da über  $C$  willkürlich verfügt werden darf. Dann verbleibt von der Lösung der Teil

$$\varphi(p) = \psi_0 \left\{ \frac{A}{p + \frac{1}{2}} + \dots \right\} + \frac{\psi_0}{2} H \cdot F \int_{p_0 = \frac{1}{2}}^p \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n - \frac{\mu+1}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{n - \frac{\mu-1}{4}}} dp, \quad (1,25)$$

der, wie man durch Entwicklung des Integrals in der Nähe  $p = +\frac{1}{2}$  sieht, regulär ist. Das bedeutet, daß die zu (1,25) gehörige Oberfunktion die Eigenschaft besitzt,

im Unendlichen wie  $e^{-\frac{\nu}{2}}$  zu verschwinden. Es existieren also für jeden beliebigen  $\mu$ -Wert (also auch für beliebige nicht ganze  $\mu$ -Werte) Lösungen der ursprünglichen

Differentialgleichung, die im Unendlichen wie  $e^{-\frac{\nu}{2}}$  verschwinden.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Funktionen im Nullpunkt des Oberbereiches verhalten. Wir schließen zu diesem Zweck an Gl. (1,25) an, die wir wie folgt umformen. Zunächst ergibt sich für das Integral in (1,25) für große  $p$  ohne den vor ihm stehenden Faktor

$$\int_{p=\frac{1}{2}}^p \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n - \frac{\mu+1}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{n - \frac{\mu-1}{4}}} dp = \int \frac{p^{n - \frac{\mu+1}{4}} \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^{n - \frac{\mu+1}{4}}}{p^{n - \frac{\mu-1}{4}} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{n - \frac{\mu+1}{4}}} dp \quad (1,26)$$

$$= \int p^{-\frac{\mu+1}{4} + \frac{\mu-1}{4}} \left(1 + a \frac{1}{2p} \dots\right) \left(1 + b \frac{1}{2p} \dots\right) dp \quad (1,27)$$

$$= \int p^{-\frac{1}{2}} \left(1 + a \frac{1}{2p} \dots\right) dp \quad (1,28)$$

$$= 2 \sqrt{p} + \frac{a}{\sqrt{p}} + \dots + Q. \quad (1,29)$$

Hierbei sind  $a, b$  gewisse Zahlenwerte und  $Q$  die willkürliche Integrationskonstante.

Ferner ergibt sich für den Lösungsteil  $H$ , Gl. (1,18), der in (1,25) vor dem Integral als Faktor auftritt [vgl. auch (1,15)]

$$H = \frac{\psi_0 \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu-3}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu+3}{4}}} = \frac{\psi_0 p^{\frac{\mu-3}{4}} \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^{\frac{\mu-3}{4}}}{p^{\frac{\mu+3}{4}} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{\frac{\mu+3}{4}}} \quad (1,30)$$

$$= \frac{\psi_0}{2} \left( p^{-\frac{3}{2}} + c p^{-\frac{5}{2}} + \dots \right). \quad (1,31)$$

Berücksichtigt man noch die in  $\{ \}$  stehenden Glieder von (1,25), die ebenfalls wie  $\frac{1}{p}$  ins Unendliche gehen und beachtet den Faktor  $F$  vor dem Integral in (1,25), so erhält man für

$$\varphi(p) = \frac{\psi_0}{2} \left( 2p^{-\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} + \frac{a+c}{p^2} + \dots \right) = \psi_0 \left( \frac{1}{p} + \frac{d}{p^2} + \dots \right) + \bar{Q} H \quad (1,32)$$

$d = \text{const.}$

Das bedeutet aber, daß die Oberfunktion im Nullpunkt wie

$$F(0) = \psi_0 (1 + dy + \dots) + \bar{Q} \left( y^{\frac{1}{2}} + \dots \right) \quad (1,33)$$

verläuft. Schreibt man dies in der Variablen  $x$ , so findet man

$$\psi \sim \psi_0 (1 + dx^2 + ex^4 + \dots) + \bar{Q} (x + fx^3 + \dots) \quad (1,34)$$

$d, e, f, \bar{Q} = \text{Konstanten.}$

Dieses Ergebnis hätte auch direkt durch Entwicklung von (1,19) nach  $\frac{1}{p}$  hergeleitet werden können. Die Lösung  $\psi$  besteht also aus zwei Teilen, von denen der eine mit  $\psi_0 (1 + \dots)$  beginnt und nur nach geraden Potenzen von  $x$  fortschreitet, während der zweite die ungeraden Potenzen von  $x$  enthält. Beide zusammen sind im Unendlichen endlich, da sich ihre Unterfunktion bei  $p = +\frac{1}{2}$

regulär verhält. Jeder einzelne Teil geht aber für sich wie  $e^{\frac{x^2}{2}}$  ins Unendliche, denn die zu den ungeraden Potenzen von (1,34) gehörige Funktion besitzt die Unterfunktion  $\bar{Q} H$ , und  $H$  ist für alle Werte von  $\mu$  mit Ausnahme des durch (1,13) gegebenen, im Punkte  $p = +\frac{1}{2}$  nicht regulär, d. h. also,

daß die entsprechende Oberfunktion wie  $e^{+\frac{x^2}{2}}$  ins Unendliche geht. Da die gesamte Oberfunktion zu (1,25) aber im Unendlichen verschwindet, muß also der Teil, der der Entwicklung nach geraden Potenzen entspricht, im Unendlichen unendlich werden und das Unendlichwerden dieser beiden Teile im Unendlichen sich gegenseitig aufheben.

Für physikalische Probleme, bei denen wir das Verhalten der Funktionen sowohl für  $-x$  als auch für  $+x$  bis ins Unendliche verfolgen müssen, sind diese Lösungen im allgemeinen aber nicht verwendbar; denn wir müssen verlangen, daß

die Funktionen sowohl für  $x = -\infty$  wie für  $x = +\infty$  verschwinden und außerdem noch im Nullpunkt einschließlich ihrer ersten Ableitung stetig sind. Diese Stetigkeit ist aber mit der durch (1,32) gegebenen Größe  $\bar{Q}$  nicht erfüllbar. Forderte man die Stetigkeit, so würden sich die beiden Funktionen, die der Entwicklung nach geraden bzw. ungeraden Potenzen entsprechen, nur für  $x = +\infty$  oder nur für  $x = -\infty$  aufheben. Solche Lösungen könnte man erhalten, indem man für die positive oder negative  $x$ -Seite zu (1,25) noch eine Lösung entsprechend (1,23) von der Form  $C' H$  mit  $C' = -2\bar{Q}$  hinzufügt. Sie wären aber physikalisch nicht brauchbar. Nur für den Fall, daß eine der beiden Entwicklungen für sich allein im Unendlichen verschwindet, erhält man physikalisch brauchbare Lösungen. Für die Entwicklung nach ungeraden Potenzen ist das für die Werte  $\mu$  gemäß (1,13) der Fall. Für die Entwicklung nach geraden Potenzen ist dies nur dann der Fall, wenn die Konstante  $Q = 0$  wird. Diese verschwindet aber, wie ein Blick auf Gl. (1,25) zeigt, nur, wenn

$$\frac{\mu-1}{4} \text{ ganzzahlig} \geq 0 \quad (1,35)$$

ist. Dann entspricht der Gl. (1,25) eine Oberfunktion, die nur nach geraden Potenzen von  $x$  entwickelbar ist und sowohl für  $x = -\infty$  wie für  $x = +\infty$  verschwindet. Die Gl. (1,35) liefert die durch (1,13) nicht gegebenen geraden Energie-Eigenwerte des Oszillatorproblems, für welche die Lösungen des Oberbereiches sowohl für  $x = +\infty$  als auch  $x = -\infty$  endlich bleiben. Für alle übrigen  $\mu$  liefert aber der im Nullpunkt nicht verschwindende Teil der Lösung (gerader Teil) im Unendlichen einen einseitig unendlichen Beitrag. Ausgenommen ist hiervon der Fall  $\frac{\mu-3}{4} \geq 0$  und ganzzahlig. Für diese Werte gilt Gl. (1,20) nicht, für sie liefert die Integration von (1,19) log-Anteile, die ein Unendlichwerden der Oberfunktion für  $x = +\infty$  und  $x = -\infty$  bedingen.

Der wesentliche Vorzug der eben verwendeten Methode liegt insbesondere darin, daß man ohne zusätzliche Rechnung das Verhalten der Lösungen der Ausgangsdifferentialgleichung gleichzeitig für Eigen- und auch Nichteigenwerte ermitteln kann. Dabei zeigt es sich vor allem, daß auch für Nichteigenwerte im Unendlichen verschwindende Lösungen existieren.

## II.

Wir wollen nun nach demselben Verfahren die Integration der Diracschen Gleichungen, soweit sie sich auf den radialen Anteil beziehen, behandeln. Die fraglichen Gleichungen lauten bekanntlich<sup>3)</sup>

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1-k}{r}\right) R_1 = \frac{1}{\hbar c} \left(E - \frac{V_0}{r} + E_0\right) R_2 = \frac{E_0 + E}{\hbar c} R_2 - \frac{V_0}{\hbar c} \cdot \frac{R_2}{r} \quad (2,1)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1+k}{r}\right) R_2 = \frac{1}{\hbar c} \left(-E + \frac{V_0}{r} + E_0\right) R_1 = \frac{E_0 - E}{\hbar c} R_1 + \frac{V_0}{\hbar c} \cdot \frac{R_1}{r} \quad (2,2)$$

Um diese Gleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation zu behandeln und das Problem auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung zurückzuführen, setzen

<sup>3)</sup> s. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 19, S. 276, Gl. (33), F. Vieweg, Braunschweig.

wir, ähnlich wie in unseren ersten Arbeiten, für die beiden unbekannten Funktionen:

$$R_1 = r^\alpha F_1 \quad (2,3)$$

$$R_2 = r^\alpha F_2, \quad (2,4)$$

in denen  $\alpha$  eine noch verfügbare Konstante ist, die später zweckmäßig bestimmt wird. Mit den Abkürzungen

$$\frac{E_0 + E}{\hbar c} = E_1 > 0 \quad (2,5)$$

$$\frac{E_0 - E}{\hbar c} = E_2 > 0 \quad (2,6)$$

$$\frac{V_0}{\hbar c} = \gamma < 0 \quad (2,7)$$

gehen die Ausgangsgleichungen dann über in

$$r^\alpha \frac{dF_1}{dr} + (\alpha + 1 - k) r^{\alpha-1} F_1 = E_1 r^\alpha F_2 - \gamma r^{\alpha-1} F_2 \quad (2,8)$$

$$r^\alpha \frac{dF_2}{dr} + (\alpha + 1 + k) r^{\alpha-1} F_2 = E_2 r^\alpha F_1 + \gamma r^{\alpha-1} F_1. \quad (2,9)$$

Im allgemeinen geht man so vor, daß man diese simultanen Gleichungen 1. Ordnung in eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Funktion  $F_1$  bzw.  $F_2$  allein umformt. Um aber für die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  getrennte Gleichungen

1. Ordnung zu bekommen, müssen die Glieder in (2,1) (2,2), die  $\frac{1}{r}$  enthalten, zum Fortfall gebracht werden. Dafür reicht die Transformation (2,3) (2,4) aber nicht aus, weshalb wir jetzt (2,9) mit einer auch noch unbestimmten, geeignet zu wählenden Konstanten  $\beta$  multiplizieren und sie dann zu (2,8) addieren. Dies führt zu

$$\frac{dF_1}{dr} + \beta \frac{dF_2}{dr} + (\alpha + 1 + k - \beta \gamma) \frac{F_1}{r} + [\beta (\alpha + 1 + k) + \gamma] \frac{F_2}{r} = E_1 F_2 + E_2 \beta F_1. \quad (2,10)$$

Wir legen nun  $\alpha$  und  $\beta$  so fest, daß in letzterer Gleichung die beiden  $\frac{1}{r}$  enthaltenden Glieder einzeln verschwinden, d. h. also daß

$$\alpha + 1 - k - \beta \gamma = 0 \quad (2,11)$$

$$\alpha \beta + \beta + k \beta + \gamma = 0 \quad (2,12)$$

gilt. Wir brauchten hier im Gegensatz zu den Ausführungen in früheren Arbeiten zwei willkürliche Konstanten, weil nun zwei Glieder mit  $\frac{1}{r}$  auftreten, in denen die verschiedenen Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  enthalten sind. Aus den Bedingungsgleichungen (2,11) und (2,12) findet man für die Konstanten

$$\beta \gamma = -k \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2} \quad (2,13)$$

$$\alpha = -1 \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2}. \quad (2,14)$$

Gl. (2,10) vereinfacht sich wegen (2,11) und (2,12) in

$$\frac{dF_1}{dr} + \beta \frac{dF_2}{dr} = E_1 F_2 + E_2 \beta F_1, \quad (2,15)$$



welche Beziehung wir nun der Laplace-Transformation unterwerfen, die zu

$$p g_1(p) + \beta p g_2(p) = E_1 g_2(p) + E_2 \beta g_1(p) \quad (2,16)$$

führt, wobei als Anfangsbedingung

$$F_1(0) = F_2(0) = 0 \quad (2,17)$$

angesetzt wird. In (2,16) bedeuten

$$g_1(p) = \mathfrak{L} \{F_1(r)\} \quad (2,18)$$

$$g_2(p) = \mathfrak{L} \{F_2(r)\}. \quad (2,19)$$

(2,16) stellt eine gewöhnliche (algebraische) Gleichung dar, aus der eine Unterfunktion durch die andere ausgedrückt werden kann, etwa

$$g_1 = \frac{E_1 - \beta p}{p - E_2 \beta} g_2. \quad (2,20)$$

Nun gehen wir auf (2,9) zurück, die mit

$$r \frac{dF_2}{dr} + (\alpha + 1 + k) F_2 = E_2 r F_1 + \gamma F_1 \quad (2,21)$$

gleichwertig ist, und unterwerfen auch diese Gleichung der Laplace-Transformation

$$- \frac{d}{dp} p g_2 + (\alpha + k + 1) g_2 = -E_2 \frac{dg_1}{dp} + \gamma g_1 \quad (2,22)$$

die eine Differentialbeziehung zwischen  $g_1$  und  $g_2$  darstellt:

$$-p \frac{dg_2}{dp} + (\alpha + k) g_2 = -E_2 \frac{dg_1}{dp} + \gamma g_1. \quad (2,23)$$

Nun setzen wir in letzterer für  $g_1$  den oben bestimmten Wert (2,20) ein, was zu

$$\dots = -E_2 \frac{E_1 - \beta p}{p - E_2 \beta} \frac{dg_2}{dp} - E_2 g_2 \frac{d}{dp} \left( \frac{E_1 - \beta p}{p - E_2 \beta} \right) + \gamma \frac{E_1 - \beta p}{p - E_2 \beta} g_2 \quad (2,24)$$

$$= -\frac{E_1 E_2 - \beta p E_2}{p - E_2 \beta} \frac{dg_2}{dp} + \frac{E_2 \beta}{p - E_2 \beta} g_2 + E_2 \frac{E_1 - \beta p}{(p - E_2 \beta)^2} g_2 + \gamma \frac{E_1 - \beta p}{p - E_2 \beta} g_2 \quad (2,25)$$

führt. Das ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung für  $g_2$ , die sich noch auf die Form

$$\frac{dg_2}{dp} \left\{ E_2 \frac{E_1 - \beta p}{p - E_2 \beta} - p \right\} = -(\alpha + k) g_2 + E_2 g_2 \frac{E_1 - E_2 \beta^2}{(p - E_2 \beta)^2} + \gamma \frac{E_1 - \beta p}{p - E_2 \beta} g_2 \quad (2,26)$$

bringen läßt. Diese Gleichung ist durch Trennung der Variablen sofort zu integrieren und auf die Form

$$\frac{dg_2}{g_2} = \left( \frac{A}{p - p_0} + \frac{B}{p - p_1} + \frac{C}{p + p_1} \right) \quad (2,27)$$

zu bringen, in der  $A$ ,  $B$  und  $C$  nach dem üblichen Partialbruchverfahren zu bestimmende Größen sind, für welche man

$$A = 1 \quad (2,28)$$

$$B = \pm 2 \sqrt{k^2 - \gamma^2} - 2 - C \quad (2,29)$$

$$C = \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2} - 1 - \frac{1}{2} \left[ k \left( \frac{p_0}{p_1} - \frac{p_1}{p_0} \right) \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2} \left( \frac{p_0}{p_1} + \frac{p_1}{p_0} \right) \right] \quad (2,30)$$

erhält und

$$p_0 = E_2 \beta \quad (2,31)$$

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{E_1 E_2} \quad (2,32)$$

bedeuten. Die Lösung von (2,27) ist also

$$g_2 = \text{const} (p - p_0) (p - p_1)^B (p + p_1)^C. \quad (2,33)$$

Entsprechend erhält man nach (2,20) für

$$g_1 = \text{const} (p - \bar{p}_0) (p - p_1)^B (p + p_1)^C \quad (2,33a)$$

mit  $\bar{p}_0 = \frac{E_1}{\beta}$ . Das Verhalten der zu  $g_2$  gehörigen Oberfunktion  $F_2$  können wir jetzt nach dem früheren Verfahren ermitteln. Wir beginnen mit der Betrachtung des Verhaltens von  $F_2$  im Nullpunkt, wozu  $g_2$  nach Potenzen von  $\frac{1}{p}$  entwickelt werden muß, was auf

$$g_2 \sim \frac{1}{p^{(A+B+C)}} \left(1 - \frac{p_0}{p}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p}\right)^B \left(1 + \frac{p_1}{p}\right)^C \quad (2,34)$$

führt. Wir müssen nun wegen (2,17) fordern, daß  $F_2$  im Nullpunkt verschwindet, wodurch auch automatisch nach (2,20)  $F_1$  verschwindet. Damit  $F_2(0) = 0$  ist, muß nach den Regeln der Asymptotik

$$-(A + B + C) = -(\pm 2\sqrt{k^2 - \gamma^2} - 1) > +1 \quad (2,35)$$

gelten. Daraus folgt, daß die Quadratwurzel immer mit dem unteren, also dem negativen Vorzeichen zu wählen ist. Das ergibt aber wegen (2,13) und (2,14) nunmehr für  $\alpha$  und  $\beta$  die Werte

$$\gamma \beta = -k - \sqrt{k^2 - \gamma^2} \quad (2,36)$$

$$\alpha = -1 - \sqrt{k^2 - \gamma^2}, \quad (2,37)$$

die damit eindeutig festgelegt sind. Für den radialen Anteil  $R$  der Wellenfunktion ergibt sich dann nach (2,3) und (2,4) in der Umgebung des Nullpunktes

$$R_{1,2} = r^\alpha F_{1,2} \sim \frac{1}{r} \cdot r^{\sqrt{k^2 - \gamma^2}} \quad (2,38)$$

in Übereinstimmung mit den bekannten Ergebnissen, wobei zu berücksichtigen ist, daß  $k$  alle negativen und positiven ganzzahligen Werte außer 0 durchlaufen kann.

Wir untersuchen nun das Verhalten der Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  im Unendlichen. Dazu müssen wir  $p_0$ ,  $p_1$  und  $p_2$  kennen. Nun ist nach (2,31) das Vorzeichen von  $p_0$  durch  $E_2$  und  $\beta$  gegeben.  $E_2$  ist nach (2,6) sicherlich positiv, da  $E$  = Energie des diskreten Zustandes sicher  $< E_0$  ist. Das Vorzeichen von  $\beta$  ergibt sich aus Gl. (2,36), nach der  $\beta \gamma$  immer negativ ist. Nun ist aber  $\gamma$  auf Grund von (2,7) durch das Vorzeichen von  $V_0$  bestimmt, dieses aber, wenn es sich, wie in diesem Falle, um die Wechselwirkung von Ladungen mit entgegengesetzten Vorzeichen handelt, negativ. Also ist  $\beta$  und damit auch  $p_0$  positiv. Diese, in der positiven Halbebene liegende Stelle der Unterfunktion  $g_2$  ruft wegen ihres ganzzahligen positiven Exponenten ( $A = 1$ ) nach den Regeln der Asymptotik bei der Oberfunktion  $F_2$  kein Unendlichwerden für  $r \rightarrow \infty$  hervor.

Die beiden anderen Singularitäten liegen symmetrisch zum Nullpunkt an den Stellen  $\pm p_1$ . Damit also die Oberfunktion im Unendlichen verschwindet, muß  $g_2(p)$  an der Stelle  $p = +p_1$  eine Nullstelle mit positiven ganzzahligen Exponenten

haben. Das ist erfüllt, wenn  $C$  gleich einer ganzen positiven Zahl  $m$  ist:

$$C = \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2} - 1 - \frac{1}{2} \left[ k \left( \frac{p_0}{p_1} - \frac{p_1}{p_0} \right) \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2} \left( \frac{p_0}{p_1} + \frac{p_1}{p_0} \right) \right] = m. \quad (2,39)$$

Aus dieser Gleichung folgen unmittelbar die Eigenwerte, denn die Größe  $C$  ist auf Grund von (2,30) eine Funktion des Energie-Eigenwertes  $E$ , und man erhält, wenn man für die Wurzeln  $p_1$  und  $p_0$  ihre Werte (2,31) und (2,32) einsetzt und zur Abkürzung vorübergehend

$$W = \sqrt{k^2 - \gamma^2} \quad (2,40)$$

einführt:

$$m = \pm W - 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{E_0 - E_1}{E_0 + E_1}} (-k \pm W) (k \pm W) - \gamma \sqrt{\frac{E_0 + E_1}{E_0 - E_1}} k \pm W \right] \quad (2,41)$$

$$= \pm W - 1 - \frac{1}{2} \left[ -\gamma \sqrt{\frac{E_0 - E_1}{E_0 + E_1}} + \gamma \sqrt{\frac{E_0 + E_1}{E_0 - E_1}} \right] \quad (2,42)$$

$$= \pm W - 1 - \frac{\gamma}{2} \left[ -\sqrt{\frac{E_0 - E_1}{E_0 + E_1}} + \sqrt{\frac{E_0 + E_1}{E_0 - E_1}} \right], \quad (2,43)$$

welches mit der Abkürzung

$$\sqrt{\frac{E_0 - E_1}{E_0 + E_1}} = \eta \quad (2,44)$$

in die bekannte Diracsche Energiegleichung

$$-\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) = \frac{2}{\gamma} (m + 1 \mp W) \quad (2,45)$$

übergeht. Dabei kann  $m$  wegen (2,39) alle positiven ganzzahligen Werte von 0 bis  $\infty$  durchlaufen.  $m = -1$  würde in (2,33) zu einem Glied von der Form

$$\sim \frac{1}{p - p_1} \quad (2,46)$$

führen, also für sich allein zu einem Unendlichwerden der Oberfunktion  $[F_2(r)]_{r \rightarrow \infty}$  Anlaß geben. Für diesen Fall ist aber zu beachten, daß gerade für  $m = -1$ , und nur für diesen Wert, nach (2,39)  $p_1$  und  $p_0$  identisch werden. Infolgedessen hebt sich in  $g_2$  nach (2,33) das Glied  $p - p_0$  im Zähler gegen  $[(p - p_1)^m]_{m=-1}$  fort. Also liefert für  $m = -1$  unser  $g_2$  eine Oberfunktion, die im Unendlichen wie  $e^{-p_1 r}$  verschwindet. Es muß also auch der Wert  $m = -1$  noch zugelassen werden. Erst der Wert  $m = -2$  ist ebenso wie alle nicht ganzzahligen verboten. Damit ist die vollständige Übereinstimmung mit den bekannten Ergebnissen erzielt. Auch die Eigenfunktionen ergeben sich jetzt unmittelbar aus Gl. (2,33), die sich in der Form

$$F_2(r) = Q^{-1} \left\{ D \frac{(p - p_0)(p - p_1)^m}{(p + p_1)^2} \right\} \quad D = \text{const} \quad (2,47)$$

$$= e^{-p_1 r} P(r) \quad (2,48)$$

schreiben lassen, wobei  $P(r)$  die Abkürzung für ein Polynom in  $r$  darstellt.

Analog lassen sich das Kontinuum und der Fall, daß  $F(0) \neq 0$  wird, behandeln.

Berlin-Charlottenburg, Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität und Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für phys. Chemie und Elektrochemie und Gastabteilungen.

(Bei der Redaktion eingegangen am 7. Mai 1948.)

## Über die Lichtanregung von Cadmiumsulfid-Kristallen durch $\alpha$ -Teilchen und Elektronen

Von H. Kallmann und R. Warminsky

### Inhaltsübersicht

An größeren Cadmiumsulfid-Kristallstücken wurde die Lichtemission bei Anregung durch  $\alpha$ -Teilchen und Elektronen untersucht. Mit etwas Silberzusatz hergestellte Kristalle zeigten ein intensives rotes Leuchten bei 7500 Å. Die Intensität dieser Lumineszenz war annähernd so groß (80%) wie bei ZnS—Ag, die absolute Lichtausbeute von CdS-Kristallen betrug bei  $\alpha$ -Teilchenanregung 19%. An CdS-Kristallen, die ohne besonderen Silberzusatz hergestellt waren, wurden sehr unterschiedliche Leucht-Intensitäten beobachtet; das Maximum der Emissionsbande lag teilweise im nahen Ultrarot. Aus Messungen der Anregung mit einzelnen  $\alpha$ -Teilchen ergaben sich für die Lichtblitze Zeitdauern von  $2 \cdot 10^{-4}$  sec (bei ZnS—Ag  $< 10^{-5}$  sec). Im Gegensatz zu feinkristallinen Leuchtstoffschichten kann man bei diesen durchsichtigen Cadmiumsulfid-Kristallstücken Streuung und Absorption vernachlässigen; dagegen muß beachtet werden, daß das Licht hauptsächlich an den schmalen Randflächen austritt, eine Folge häufiger Totalreflexion. Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Lichtemission und Leitfähigkeit haben ergeben, daß nur Kristalle mit starker Lumineszenz auch ein gutes Leitvermögen aufweisen.

### Lichtausbeute bei Anregung durch viele $\alpha$ -Teilchen und Elektronen

Im Verlaufe unserer Untersuchungen über die Lichtanregung von festen Körpern durch Korpuskularteilchen haben wir die Anregung von Cadmiumsulfid näher untersucht. Verwandt wurden einzelne Kristalle, die nach dem Verfahren von R. Frerichs<sup>1)</sup> hergestellt waren. Es handelte sich also um einzelne Kristallstücke, die eine Fläche bis zu mehreren cm<sup>2</sup> und eine Dicke bis zu einigen Zehntel mm besaßen. Es zeigte sich, daß die meisten Kristalle auch schon ohne besondere Aktivierung bei Bestrahlung mit gewöhnlichem Licht eine Fluoreszenz aufwiesen, die an der roten Grenze des sichtbaren Lichtes lag. Die einzelnen Kristalle verhielten sich in bezug auf ihre Leuchtintensität sehr unterschiedlich. Wenn man bei der Herstellung der Kristalle eine Spur Silber in den Ofen hereinbrachte, so zeigten fast alle Kristalle ein sehr intensives rotes Leuchten; aber auch schon bei Herstellung ohne besonderen Silberzusatz leuchtete ein Teil mit ungefähr der gleichen Frequenz. Es war deutlich zu erkennen, daß die mit Silberzusatz hergestellten Kristalle etwa bei 7500 Å das Maximum ihres Lumineszenzspektrums hatten. Bei den ohne besonderen Silberzusatz hergestellten Kristallen wurde im allgemeinen eine Verschiebung ins Langwellige, teilweise sogar ins Unsichtbare, beobachtet. So fanden wir einige Kristalle, die überhaupt nicht im Sichtbaren leuchteten, die

<sup>1)</sup> R. Frerichs, Naturwiss. 33, 281 (1946).

aber, mit der Photozelle untersucht, eine starke Lumineszenz kurz oberhalb 8000 Å zeigten. Wir nehmen an, daß die nicht mit Silberzusatz hergestellten Kristalle, wenigstens zum Teil, eine Lumineszenz durch Zinkzusatz aufweisen, wobei das Maximum der Emissionsbande etwa bei 8000 Å zu erwarten ist. Bei noch höheren Wellenlängen wurde jedoch, soweit wir mit unserer Photozelle, deren Empfindlichkeit bis zu 10000 Å reichte, messen konnten, keine Emission mehr gefunden. Wie gesagt, war die Lumineszenz-Intensität der verschiedenen Kristalle sehr unterschiedlich. Die Ausbeuten für die besten Kristalle, die wir gefunden haben, sind in Tabelle 1 angegeben und zwar relativ auf ZnS = 100 bezogen.

Tabelle 1<sup>a)</sup>

Stoff	Anregung d. v. $\alpha$ -Teilchen	Anregung d. v. Elektronen	Einzelimpuls ( $\alpha$ )		Abs. Lichtausb. bei $\alpha$ -Teilchenerr.
	%	%	Größe %	Abklingzeit sec	%
ZnS-Ag	100	100	100	$2 \cdot 10^{-6}$	28
CdS-Ag	78	80	24	$2 \cdot 10^{-4}$	19

Dabei sind die Werte auf gleiche Empfindlichkeit der Photozelle umgerechnet, also die angegebenen Zahlen stellen das Verhältnis der Energieausbeute (nicht Quantenausbeute) bei ZnS und CdS dar. In der letzten Spalte unserer Tabelle ist die absolute Ausbeute bei  $\alpha$ -Strahlererregung nach unseren neusten Messungen mit einer Genauigkeit von  $\pm 20\%$  angegeben. Wir kommen auf sie weiter unten zu sprechen. Wie die Tabelle zeigt, verhält sich also Cadmiumsulfid trotz der gänzlich anderen Lage seines Emissionsspektrums nicht wesentlich schlechter in bezug auf die Energieausbeute als das blau leuchtende Zinksulfid-Silber.

#### Lichtausbeute bei Anregung durch einzelne $\alpha$ -Teilchen

Außer dieser Messung, bei der das Cadmiumsulfid durch eine große Anzahl von Teilchen gleichzeitig beschossen wurde, haben wir auch Messungen der Lichtanregung mit einzelnen  $\alpha$ -Teilchen durchgeführt. Das Verhältnis der Lichtblitz-Intensität im Cadmiumsulfid zu der im Zinksulfid ist in der vierten Spalte der Tabelle 1 eingetragen. Wir möchten besonders darauf hinweisen, daß dieser Wert wiederum relativ zum Zinksulfid auf gleiche Energie bezogen ist. Ausschlagsmäßig ist der Wert für Cadmiumsulfid wesentlich größer. Das liegt daran, daß die Photozelle für die roten Emissionsbanden des Cadmiumsulfids viel empfindlicher ist als für die blaue Strahlung. Daher ist das Cadmiumsulfid für Meßzwecke mit einem im Roten empfindlichen Sekundär-Elektronenvervielfacher sehr gut geeignet. Der bei Einzelmessungen kleinere Wert im Vergleich zu den Gleichstrommessungen erklärt sich daraus, daß die Zeitdauer eines Lichtblitzes im Cadmiumsulfid bei dem untersuchten Kristall sehr viel größer war als bei Zinksulfid. Während bei Zinksulfid die Lichtblitze kürzer als  $10^{-6}$  sec waren, betrug hier die Dauer eines Lichtblitzes etwa  $2 \cdot 10^{-4}$  sec. Infolge der längeren Emissionszeit beim Cadmiumsulfid wird das Maximum des Ausschlages im Oscillographen wesentlich kleiner als bei der kurzen Emissionszeit des Zinksulfids. Dabei ist aber zu beachten, daß diese Verhältnisse von Kristall zu Kristall Schwankungen aufweisen.

<sup>a)</sup> Inzwischen haben wir noch intensiver leuchtende Kristalle hergestellt mit einer Lichtausbeute von 26%.

### Absolute Lichtausbeute

In der letzten Spalte der Tabelle ist noch die absolute Ausbeute der Lichtanregung eingetragen. Sie ist in unserem Laboratorium neu bestimmt worden. Auf die Meßmethode werden wir noch später ausführlich zu sprechen kommen. Hier sei nur folgendes bemerkt: Um in reinem Cadmiumsulfid ein Elektron von dem oberen Rand des untersten Energiebandes an den unteren Rand des oberen Energiebandes zu bringen, braucht man eine Energie von etwa 2,3 V. Bei  $\alpha$ -Teilchen-Erregung werden natürlich nicht nur die Elektronen aus dem oberen Teil des unteren Bandes, sondern alle Elektronen des unteren Bandes ziemlich gleichmäßig erregt, so daß durchschnittlich schon eine mittlere Energie von etwa 4—5 V notwendig sein wird, um ein Elektron an den unteren Rand des oberen Bandes zu bringen. Bei der Erregung werden die Elektronen nicht nur an den unteren Rand des oberen Bandes gebracht, sondern sie erhalten auch sehr beträchtliche Mengen zusätzlicher Energie, die dann entweder in Form von Wärme an das Gitter abgegeben oder zur Erregung von weiteren Elektronen verwendet wird. Bei diesem Vorgang werden also sicherlich wieder einige Volt Energie in Form von Wärme an das Gitter abgegeben werden. In Summa wird also, um ein Elektron primär oder sekundär zu erregen, größenordnungsmäßig im Mittel eine Energie von mehr als 7 V gebraucht werden. Von dieser Energie wird durch die Lumineszenz nur der Betrag von 1,5 V ausgestrahlt. Nun fanden wir eine Energie-Ausbeute von etwa 25%. Das besagt also, daß zum mindesten ein sehr großer Teil aller überhaupt erregten Elektronen unter Aussendung des Lumineszenzspektrums in das untere Band zurückkehrt. Die besten der von uns untersuchten Kristalle liegen also sicher schon nahe dem Optimum des Leuchtens, das überhaupt zu erreichen ist.

### Beobachtungen an einzelnen Kristallen

Wie schon oben erwähnt, unterscheiden sich diese Versuche von den Beobachtungen an gewöhnlichen Leuchtstoffen im wesentlichen dadurch, daß hier mit Kristallstücken von relativ sehr großer Fläche gearbeitet wird. Streuung und Absorption sind daher bei diesen Versuchen vernachlässigbar klein. Es zeigt sich aber ein anderes Phänomen, das man beachten muß: Schon bei der Erregung mit gewöhnlichem Licht sieht man, daß nicht nur die breiten Flächen, sondern vor allen Dingen die schmalen Randflächen leuchten. Dies liegt zum Teil daran, daß aus den Kristallen des hohen Brechungsindex wegen nur das in einem kleinen Winkelbereich auf die Kristallfläche auftreffende Licht auch aus ihr austritt. Das nicht sofort austretende Licht wird wiederholt im Kristall reflektiert und kann dann bevorzugt durch die schmalen Randflächen austreten. Wir haben uns durch besondere Messungen davon überzeugt, daß, obgleich nur die Mitte des Kristalls mit  $\alpha$ -Teilchen beschossen wird, die Randflächen stark leuchten, und aus der Mitte des Kristalls nur ein relativ kleiner Bruchteil des Lichtes emittiert wird. Es handelt sich also sicherlich nicht um eine Inhomogenität der Aktivierung innerhalb des Kristalls. Das geht auch schon daraus hervor, daß die maximale mittlere Lichtausbeute so nahe an dem theoretisch zu erwartenden Grenzwert liegt. Außer der Wirkung der Totalreflexion könnte natürlich auch eine Diffusion der Erregung (Exitonen) durch den Kristall hindurch wirksam sein. Wir glauben, daß dies nur zu einem kleinen Teil zutreffen kann, weil die Lichtaussendung in relativ sehr kurzer Zeit vor sich geht, in der eine Diffusion der Erregungszentren bis an den Rand des Kristalls wohl nicht möglich ist.



## Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Lichtausbeute

Wir haben schließlich noch die Beziehung zwischen Lichtemission und elektrischer Leitfähigkeit des Kristalls untersucht. Wie aus den Untersuchungen von R. Frerichs<sup>a)</sup> bekannt ist, zeigen diese Kristalle bei Bestrahlung mit Licht unterhalb 5200 Å und bei Bestrahlung mit Elektronen,  $\alpha$ -Teilchen, Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlen bei Anlegen eines Feldes eine sehr erhebliche zusätzliche elektrische Leitfähigkeit. Dabei war die bei dieser Leitfähigkeit transportierte Elektrizitätsmenge wesentlich größer als die gesamten, durch die äußere Strahlung primär und sekundär erzeugten angeregten Elektronen (Verstärkungsfaktor). Unsere Untersuchungen haben nun — im Gegensatz zu den bisher vertretenen Anschauungen — ergeben, daß gerade diejenigen Kristalle, die besonders gut leuchten, auch besonders gut leiten, also einen besonders großen Verstärkungsfaktor aufweisen. Dabei ist es so, daß Kristalle, die die gleiche Leuchtfähigkeit besitzen, nicht die gleiche Leitfähigkeit haben, diese kann vielmehr noch sehr erheblichen Schwankungen unterworfen sein. Im allgemeinen kann man aber sagen, daß diejenigen Kristalle, die wenig Licht emittieren, auch nur eine sehr geringe Leitfähigkeit zeigen. Als Beispiel geben wir Tabelle 2, die die Werte bei  $\alpha$ -Strahlenerregung und 100 V ange-

Tabelle 2

Kristalle mit geringer Lumineszenz		Kristalle mit starker Lumineszenz	
Nr.	Strom in A bei $\alpha$ -Bestrahlung	Nr.	Strom in A bei $\alpha$ -Bestrahlung
1	$3 \cdot 10^{-8}$	51	$1,5 \cdot 10^{-6}$
2	$1 \cdot 10^{-8}$	52	$1 \cdot 10^{-5}$
3	$2 \cdot 10^{-8}$	53	$5 \cdot 10^{-4}$
4	$1,5 \cdot 10^{-8}$	54	$5 \cdot 10^{-3}$

Gering lumineszierende Kristalle ergaben an der Photozelle Ausschläge, die etwa 50-100mal kleiner waren als die der Tabelle 1.

Ausschläge etwa wie in Tabelle 1.

legter Spannung angibt. Die Zahl der  $\alpha$ -Teilchen, die bei den in der Tabelle genannten Versuchen pro sec auf den Kristall auftrafen, betrug etwa 200000. Es ist also deutlich, daß die schlecht leuchtenden Kristalle auch eine sehr geringe Leitfähigkeit besitzen. Wir haben bisher keinen schlecht leuchtenden Kristall gefunden, der eine gute Leitfähigkeit besaß. Besonders wichtig scheint es uns aber zu sein, daß die meisten der gut leuchtenden Kristalle, bei denen also fast alle Elektronen ihr Licht aussenden, trotz dieser Tatsache eine ganz außerordentlich große Leitfähigkeit aufweisen. Nur wenige gut leuchtende Kristalle zeigen eine mäßige Leitfähigkeit. Wir werden hierauf in einer weiteren Arbeit zu sprechen kommen. Manchmal trifft man auf Kristalle, die gut leiten, aber kein sichtbares Licht aussenden. Die Untersuchung mit der Photozelle ergab aber dann, daß sie im ultraroten Gebiet gut leuchteten. Ob die geringe Leuchtfähigkeit derjenigen Kristalle, die schlecht leiten, darauf beruht, daß diese Kristalle durch irgendeinen „Killer“ verunreinigt sind, wodurch eine schnellere Rückkehr der Elektronen in das untere Band ermöglicht wird, oder ob auch ganz reine Kristalle eine schlechte Leitfähigkeit aufweisen, können wir noch nicht entscheiden. Wir hoffen, bald darüber berichten zu können.

<sup>a)</sup> R. Frerichs und E. Warminsky, Naturwiss. 33, 251 (1946).

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie.

(Bei der Redaktion eingegangen am 15. April 1948.)



## **Quantitative Messungen an $\alpha$ -Teilchen mit dem Leuchtmassenzähler**

Von I. Broser und H. Kallmann

(Mit 8 Abbildungen)

### **Inhaltsübersicht**

Die Umwandlung der kinetischen Energie von  $\alpha$ -Teilchen in Licht beim Szintillationsvorgang in pulverförmigen ZnS-Ag-Schichten wird sowohl an einzelnen  $\alpha$ -Teilchen als auch an vielen den Leuchtstoff gleichzeitig erregenden  $\alpha$ -Teilchen quantitativ mit Hilfe eines Sekundär-Elektronenvervielfachers untersucht und zu einem Meßverfahren zur Energiebestimmung und Eichung von  $\alpha$ -Strahlenpräparaten ausgebaut. Durch Zählung der einzelnen Lichtblitze der  $\alpha$ -Teilchen und durch gleichzeitige Messung der Lichtintensität wird nachgewiesen, daß die von einzelnen  $\alpha$ -Teilchen gleicher Energie hervorgerufenen Lichtblitze keineswegs gleich groß sind, sondern erheblich um einen mittleren Wert schwanken. Eine wesentliche Verbesserung dieser Verhältnisse erhält man bei Benutzung von großen Einkristallen aus Cadmiumsulfid. Diese geben beim Auftreffen von  $\alpha$ -Teilchen bestimmter Energie Lichtblitze, die nur noch etwa um eine mittlere Größe um maximal  $\pm 25\%$  schwanken. Es lassen sich mit dieser Methode einzelne  $\alpha$ -Teilchen bis herunter zu einer Energie von 100000 Volt registrieren und ausmessen. Aus Gleichstrommessungen mit vielen  $\alpha$ -Teilchen ergibt sich, daß die physikalische Ausbeute bei der Umwandlung der  $\alpha$ -Teilchen in Licht bei ZnS-Ag nahezu unabhängig von der Energie der  $\alpha$ -Teilchen, wenigstens in einem Bereich von 0,1–5 MeV, ist. Noch 100  $\alpha$ -Teilchen/sec lassen sich ohne Schwierigkeiten als ein im Vervielfacher erzeugter Gleichstrom von etwa  $10^{-9}$  Amp. nachweisen. Die Messungen führen zu einer Methode, um  $\alpha$ -Aktivitäten beliebiger Stärke zu eichen.

### **I. Einleitung**

In einer Reihe von Arbeiten<sup>1)</sup> haben wir gezeigt, daß man die Lichtwirkung sowohl von  $\alpha$ -Teilchen als auch von Elektronen und  $\gamma$ -Quanten mit Hilfe eines Leuchtmassenzählers, bestehend aus einem Leuchtstoff und einer Sekundär-Elektronenvervielfacherphotozelle, in einfachster Weise nachweisen kann. Für  $\alpha$ -Teilchen erwies sich bisher als bester Leuchtstoff Zinksulfid, für besondere Zwecke nach neuesten Messungen aber auch Cadmiumsulfid. Für  $\beta$ -Teilchen und  $\gamma$ -Quanten haben sich organische Körper mit Doppelbindungen als besonders gut erwiesen.

<sup>1)</sup> I. Broser und H. Kallmann, Z. Naturforsch. 2a, 439-440 (1947); I. Broser und H. Kallmann, Z. Naturforsch. 2a, 642 (1947); I. Broser, L. Herforth, H. Kallmann und U. Martius, Z. Naturforsch. 3a, 6 (1948).

In der vorliegenden Arbeit wird der Anregungsprozeß der  $\alpha$ -Teilchen in Leuchtstoffen vom Typ des Zinksulfids und besonders die Frage nach der Umwandlung der kinetischen Energie der  $\alpha$ -Teilchen in Licht untersucht.

## II. Meßanordnung

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Helligkeiten der Lichtblitze von der Energie der erregenden  $\alpha$ -Teilchen wurde mit der in Abb. 1 abgebildeten Apparatur gearbeitet.

Mit dieser Anordnung war es möglich, gleichzeitig die Energien der  $\alpha$ -Teilchen und die Größe der Intensitäten einzelner Lichtblitze sowie auch die Gesamt-

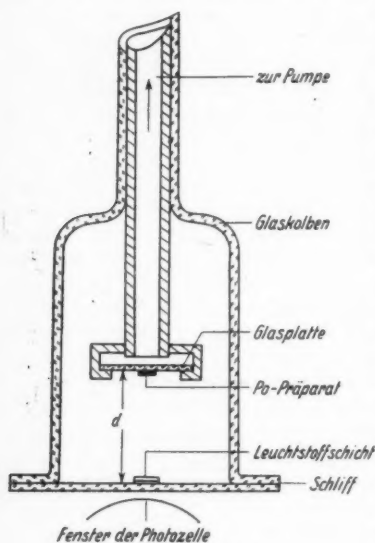


Abb. 1. Meßanordnung

intensitäten vieler Lichtblitze zu bestimmen. Auf dem Boden eines evakuierbaren Glaskolbens wurde ein 28 mm<sup>2</sup> großer Fleck von ZnS-Ag aufgebracht. Die Leuchtstoffschicht besaß eine gleichmäßige Massenbelegung von etwa 5 mg/cm<sup>2</sup>. Das die  $\alpha$ -Teilchen aussendende Präparat bestand aus einer sehr kleinen Menge eines poloniumhaltigen Stoffes, welcher auf der Unterseite einer Glasplatte angebracht und mit einer schützenden dünnen Kollodiumschicht versehen war. Es war zu erwarten, daß alle ausgesandten  $\alpha$ -Teilchen ungefähr eine einheitliche Reichweite — maximal 3,9 cm in Luft bei 15°C und Normaldruck, entsprechend einer Energie von 5,3 MeV — besaßen. Das Po-Präparat befand sich in einem Abstand  $d = 4$  cm über dem Leuchtstoff. Die  $\alpha$ -Teilchen, die den Leuchtstoff erregten, mußten also alle den gleichen Weg innerhalb des Glaszylinders zurücklegen. War das Gefäß auf Hochvakuum ( $p \approx 0$ ) evakuiert, so gaben sie ihre gesamte Energie im

Leuchtstoff ab; stand der Kolben dagegen unter irgendeinem Druck  $p$ , so trafen die  $\alpha$ -Teilchen nur noch mit einer kleineren kinetischen Energie auf die Schicht auf. Die Lichtblitze gelangten durch das Fenster des dicht unter dem Leuchtstoff angebrachten Sekundär-Elektronenvervielfachers auf die photoempfindliche Schicht und lösten dort Elektronen aus, die im Vervielfachersystem auf das 10<sup>4</sup>-fache vervielfacht wurden und am Arbeitswiderstand Spannungsimpulse erzeugten. Bei Messung einzelner Impulse wurden diese über einen dreistufigen Röhrenverstärker dem Gitter eines Thyratrons zugeführt, welches nur zündete und ein Zählwerk zum Ansprechen brachte, wenn der Spannungsstoß größer war als die regelbare Gittervorspannung. Auf diese Weise konnte die Größe der Impulse — ein Maß für die Intensität der Lichtblitze — genau gemessen werden. Für den Fall der Messung der summierten Helligkeiten vieler Lichtblitze wurde statt des Arbeitswiderstandes ein hochempfindliches Galvanometer an den Ausgang des Vervielfachers angeschlossen.

Brose

fache  
der in  
zur L  
Elek  
Temp

Zu  
den I  
des T  
noch  
eine  
zufäll  
sehr g  
pulser  
Anore  
Druck  
entsp  
760 m  
der si  
sich c  
aus d

In ih  
Druck

W  
Glask  
Teilch  
weite  
daß d

fachern angeschlossen. Die Ausschläge dieses Instrumentes waren proportional der im Leuchtstoff erzeugten Gesamthelligkeit. Bei diesen Untersuchungen wurde zur Herabdrückung des störenden Wärmerauschens und des Dunkelstromes des Elektronenvervielfachers mit Kohlendioxydschnee gekühlt, und zwar wurde die Temperatur konstant auf etwa  $-50^{\circ}\text{C}$  gehalten.

### III. Meßergebnisse

#### 1. Einzelne Lichtblitze in polykristallinem ZnS-Ag

Zunächst wurde die Reichweite- und damit auch die Energieverteilung der auf den Leuchtstoff auftreffenden Teilchen bestimmt. Dazu wurde die Sperrspannung des Thyratrons so niedrig wie möglich eingestellt, um möglichst kleine Impulse noch zur Zählung zu bringen. Es erwies sich, daß es nicht mehr vorteilhaft war, eine kleinere Sperrspannung als minus 2 Volt zu benutzen, da dann die Zahl der zufälligen trotz Kühlung noch auftretenden Schwankungen des Vervielfachers sehr groß wurde. Bei minus 2 Volt trat dagegen nur ein Nulleffekt von etwa 20 Impulsen auf, der bei den folgenden Meßergebnissen bereits abgezogen ist. Mit dieser Anordnung wurde die Zahl der erzeugten Szintillationen in Abhängigkeit vom Druck  $p$  gemessen. Der beim Druck  $p = 0$  an den Leuchtstoff abgegebenen Energie entspricht eine Reichweite  $R_0$  der  $\alpha$ -Teilchen bei Normalbedingungen ( $15^{\circ}\text{C}$  und 760 mm Hg). Herrscht der Druck  $p$ , so bleibt den Teilchen eine Restenergie, mit der sie auf den Leuchtstoff treffen, der eine Restreichweite  $R_0 - R$  entspricht, wobei sich die Größe  $R$  (Bremsstrecke unter Normalbedingungen) in bekannter Weise aus der Formel 1 berechnet.

$$R = \frac{p \cdot d \cdot 288}{760 \cdot T} \quad (1)$$

In ihr ist  $d = 4$  cm der von den  $\alpha$ -Teilchen zurückgelegte Weg,  $p$  der jeweilige Druck und  $T$  die absolute Temperatur bei der Messung.

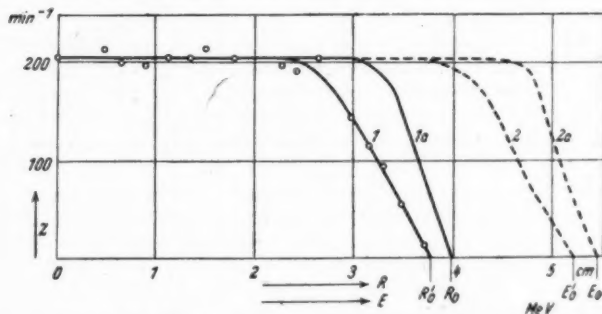


Abb. 2. Reichweite- und Energieverteilung der  $\alpha$ -Teilchen

Wie man aus Gleichung (1) sieht, entspricht der Änderung des Druckes  $p$  im Glaskolben eine dazu proportionale Veränderung der Bremsstrecke  $R$  für die  $\alpha$ -Teilchen. Abb. 2, Kurve 1, zeigt die Zahl der Teilchen mit einer größeren Reichweite als  $R$  in Abhängigkeit von der Bremsstrecke  $R$ . Man sieht aus der Kurve, daß die meisten Teilchen eine Reichweite zwischen 3 und 4 cm haben. Eine kleine

Korrektur der Kurve ist jedoch noch vorzunehmen, weil wir die Teilchen nicht bei der Sperrspannung 0 Volt, sondern bei minus 2 Volt gezählt haben. Dadurch wurden nur solche Teilchen registriert, die noch eine gewisse Restenergie hatten, welche genügte, um Spannungsimpulse von 2 Volt zu erzeugen. Das Ende der Kurve ( $R_0$ ) entspricht also nicht der wahren Reichweite, sondern ist etwas kleiner. Man kann aber leicht die wahre Reichweitekurve — wie wir weiter unten zeigen werden — bestimmen (Kurve 1a). Nach der Geigerschen Reichweitebeziehung lassen sich aus den Reichweitekurven auch die entsprechenden Energiekurven zeichnen (Kurven 2 und 2a).

Die bisherigen Messungen wurden also mit konstanter Thyatronsperrspannung, aber mit variablen Energien der auf den Leuchtstoff auftreffenden  $\alpha$ -Teilchen durchgeführt. Nunmehr wurde mit konstant bleibenden  $\alpha$ -Teilchenenergien, aber

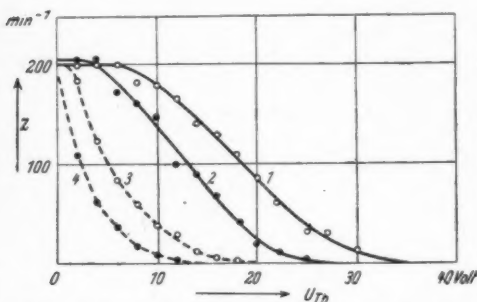


Abb. 3. Intensitätsverteilung einzelner Lichtblitze in ZnS-Ag

Intensitätsverteilungskurve 1 besitzt nur einen sehr kurzen konstant bleibenden Teil, um dann sehr langsam abzufallen. Wäre bei bestimmter  $\alpha$ -Teilchenenergie die Helligkeit der Lichtblitze bei jedem Einzelprozeß immer dieselbe, so müßte diese Kurve in ihrer Form völlig mit der Energiekurve 2a übereinstimmen. Die Kurve zeigt hingegen eine sehr erhebliche Streuung der Helligkeiten der einzelnen Lichtblitze um einen mittleren Wert. Wir vermuten, daß diese Streuung ihre Ursache in der mikrokristallinen Struktur der Leuchtschicht hat. Denn einmal wird in der ungleichmäßigen dünnen Schicht von den  $\alpha$ -Teilchen nur ein gewisser verschieden großer Teil der Energie absorbiert und in Licht umgesetzt werden, und zum anderen gelangt infolge starker optischer Verschiedenheiten der Leuchtstoffkörnerchen der erzeugte Lichtblitz nicht immer mit gleichen Beträgen in den Vervielfacher. Für diese Annahme sprechen auch unsere weiter unten mitgeteilten Versuche an Einkristallen.

Die Messung der Helligkeitsverteilung der Lichtblitze erlaubt es nunmehr, die oben erwähnte Korrektur an den Kurven 1 bzw. 2 der Abb. 2 zu erklären. Man erkennt, daß die Lichtintensität, die nötig ist, um den Impuls von 2 Volt am Thyatron zu erzeugen, von verschiedenen großen  $\alpha$ -Teilchenenergien herrührt. Nimmt man nun näherungsweise an — wie dies in der Tat auch durch das Ergebnis bestätigt wird —, daß die Lichtverteilungskurven der Abb. 3 durch  $\alpha$ -Teilchen von praktisch gleicher Energie erzeugt wurden, und daß die Lichtausbeute in erster Näherung proportional der Teilchenenergie ist, so kann man aus den Kurven der Abb. 3 entnehmen, daß zum Beispiel an dem Punkt, an dem in Abb. 2 keine Teil-

variabler Thyatronsperrspannung gearbeitet. Auf diese Weise wurde die Intensitätsverteilung der Lichtblitze, die durch die  $\alpha$ -Teilchen erzeugt wurden, festgestellt. Abb. 3 (Kurven 1–4) zeigt bei verschiedenen Drucken, d. h. bei verschiedenen  $\alpha$ -Energien aufgenommene derartige Lichtintensitätskurven.

Diese Kurven unterscheiden sich in ihrem Verlauf merklich von der Energieverteilungskurve 2a in Abb. 2.

Die für  $p = 0$  aufgenommene

chen mehr gezählt wurden ( $R'_0$  bzw.  $E'_0$ ), doch noch Teilchen mit einer gewissen Energie vorhanden waren, nämlich solche, die Lichtblitze von einer Impulsgröße kleiner als 2 Volt erzeugten. Da nun, wie Kurve 1 der Abb. 3 zeigt, die größten Lichtimpulse etwa 35 Volt Thyratronsperresspannung entsprachen, so werden Lichtblitze von 2 Volt Energie im günstigsten Falle noch durch Energien erzeugt, die etwa 6% der gesamten Energie der  $\alpha$ -Teilchen betragen. Man kann also sagen, daß für den betrachteten Fall die wahre Energie der Teilchen noch um 6% größer war, als es der Energie  $E'_0$  (bzw. Reichweite  $R'_0$ ) entspricht, so daß der wahre Reichweite- bzw. Energiewert in der Abb. 2 bei  $E_0$  bzw.  $R_0$  liegt.

Ganz analog kann man nun für die anderen Punkte der Kurve 2 verfahren und aus den Kurven der Abb. 3 angenäherte Korrekturen entnehmen. Führt man dies durch, so erhält man die Kurve 2a bzw. 1a der Abb. 2. Aus diesen entnimmt man, daß in der Tat unsere Voraussetzung, daß die Energie der auftreffenden  $\alpha$ -Teilchen annähernd homogen ist, erfüllt wird. Die noch vorhandene geringe Streuung der Reichweiten bzw. Energien der  $\alpha$ -Teilchen kann leicht dadurch erklärt werden, daß ein verschieden großer Teil der Energie verschiedener  $\alpha$ -Teilchen in der dünnen Kollodiumhaut über dem Po-Präparat absorbiert wird.

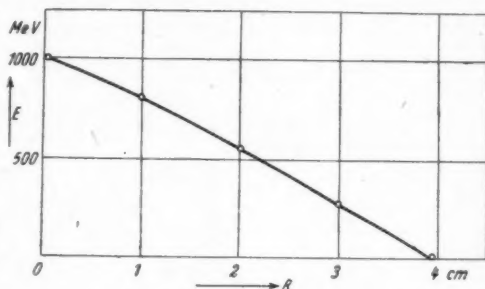


Abb. 4. Abnahme der Gesamtenergie der Teilchen mit wachsender Bremsstrecke

Aus der Energieverteilungskurve 2a läßt sich durch Integration die gesamte in einer Minute auf den Leuchtstoffleck auffallende Energie ermitteln. Erhöht man den Druck im Kolben, so verringert sich diese Energie um einen bestimmten Teil, der mit steigendem Druck zunimmt. Der Verlauf dieser Abnahme, der sich ebenfalls aus Kurve 2a, Abb. 2, errechnet, ist in Abb. 4 wiedergegeben.

Als Abszisse ist wiederum nicht der Druck  $p$ , sondern die nach der Gleichung (1) errechnete Bremsstrecke  $R$  aufgetragen. Entsprechend erhält man durch Integration der Kurve 1 in Abb. 3 ein Maß für die gesamte, durch alle  $\alpha$ -Teilchen erzeugte Lichtintensität beim Druck 0. Die Kurven 2, 3 und 4 sind bei anderen Drucken aufgenommene Intensitätsverteilungen und ergeben integriert ebenfalls ein Maß für die gesamte in einer Minute erzeugte Lichtmenge bei dem betreffenden Druck. Die Abnahme der Gesamthelligkeit mit wachsendem Druck bzw. zunehmender Bremsstrecke  $R$  ist aus Abb. 5 ersichtlich, wobei noch zwei weitere Punkte aus hier nicht angegebenen Helligkeitsverteilungskurven mit eingezeichnet sind (schwarze Punkte).

Aus den Kurven in Abb. 4 und 5 läßt sich nunmehr ein Zusammenhang zwischen der gesamten während einer bestimmten Zeit (1 Min.) auf den Leuchtstoff treffenden Energie der  $\alpha$ -Strahlung und der dadurch erzeugten summierten Lichtintensität finden: In Abb. 6 sind einander entsprechende Punkte der Abb. 4 und 5 aufgetragen und ergeben, wie man sieht, einen recht guten linearen Zusammenhang.

Damit ist unsere zweite Voraussetzung über die Proportionalität zwischen Lichtintensität und  $\alpha$ -Teilchenenergie auch genügend genau bestätigt.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß es mit Hilfe pulverförmiger Leuchtstoffschichten nicht möglich ist, aus der Helligkeit der Lichtblitze genauere

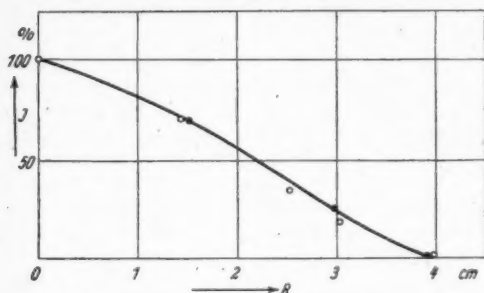


Abb. 5. Abnahme der Gesamthelligkeit einzelner Lichtblitze mit wachsender Bremsstrecke

der Mittelwert der Helligkeiten vieler Lichtblitze proportional der Energie der einzelnen  $\alpha$ -Teilchen ist.

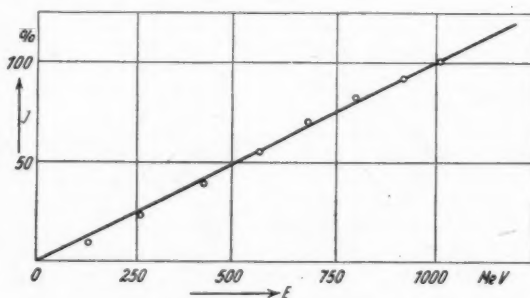


Abb. 6. Zusammenhang zwischen der gesamten erzeugten Helligkeit und der gesamten Energie der  $\alpha$ -Teilchen

## 2. Einzelne Lichtblitze in CdS-Ag-Einkristallen

Da wir vermuteten, daß die Schwankungen der Intensität der einzelnen Lichtblitze im wesentlichen auf die mikrokristalline Struktur des Leuchtstoffes zurückzuführen sind, haben wir die obigen Versuche im weiteren Verlauf unserer Messungen mit einzelnen großen Kristallen wiederholt, und zwar mit CdS-Kristallen, die mit Silber aktiviert waren. Über die Leuchteigenschaften derartiger Kristalle sind in der letzten Zeit von H. Kallmann und R. Warminsky nähere Untersuchungen durchgeführt worden<sup>2)</sup>. Es ergab sich eine gute Lumineszenz bei Anregung mit ultravioletttem Licht, Röntgen- und Korpusskularstrahlen mit einem Emissionsgebiet bei 7700 Å. Auch einzelne Lichtblitze beim Auftreffen von  $\alpha$ -Teilchen konnten an solchen Kristallen gut nachgewiesen werden. Dabei erwies sich das im Roten liegende Emissionsspektrum des CdS für die Messung als besonders geeignet, da

<sup>2)</sup> H. Kallmann u. R. Warminsky, Ann. Physik (z. Z. im Druck).

der  
Schie

D  
wurd  
durch  
und  
wurd  
schlo  
Eiger  
auf d

D  
Verbo  
Licht  
hell v  
nur e  
von a  
Beach  
homo  
(Kur  
bei al  
kunge  
um 2  
rung  
bei d  
und  
es sog  
prop  
erzeug  
Weise  
messu

D  
Messu  
nuier  
wurd  
1200  
vom  
den L  
 $p = 0$   
absor  
ihrer  
Gleich  
sich ü  
der in

<sup>3)</sup>  
geschl  
Zeitsch



der von uns benutzte Sekundär-Elektronenvervielfacher eine photoempfindliche Schicht aus CsO besaß mit einem Empfindlichkeitsmaximum bei etwa 8000 Å.

Die Messung der Helligkeitsverteilung, entsprechend der Kurve 1 in Abb. 3, wurde an einem 40 mm<sup>2</sup> großen und etwa 10 mg/cm<sup>2</sup> dicken CdS-Ag-Einkristall durchgeführt. Durch eine Blende wurde der größte Teil des Kristalls abgedeckt, und nur ungefähr 7 mm<sup>2</sup> konnten von den  $\alpha$ -Teilchen getroffen werden. Dadurch wurden einmal nicht ganz regelmäßige Teile des Kristalles vom Leuchten ausgeschlossen, und zum anderen war anzunehmen, daß die optischen und elektrischen Eigenschaften des Kristalles auf einem kleinen Gebiet gleichmäßiger waren als auf der Gesamtfläche.

Das Ergebnis der Untersuchung zeigt Abb. 7. Man erkennt eine wesentliche Verbesserung der Intensitätsverteilung gegenüber der Kurve 1 in Abb. 2. Alle Lichtblitze waren mindestens halb so hell wie die größten, während vorher nur etwa  $\frac{1}{4}$  der maximalen Intensität von allen Lichtblitzen erreicht wurde. Beachtet man, daß eine gewisse Inhomogenität der  $\alpha$ -Energie vorlag (Kurve 2a, Abb. 2), so treten sicher bei allen Lichtblitzen kleinere Schwankungen um eine mittlere Größe als um 25% auf. Durch weitere Verbesserung der Eigenschaften der Kristalle bei der Herstellung und Aktivierung und noch stärkere Ausblendung war es sogar möglich, fast völlig energieproportionale einzelne Lichtblitze zu erzeugen. Weitere Versuche, auf diese Weise eine neue einfache Methode zur Registrierung und gleichzeitigen Energiemessung einzelner  $\alpha$ -Teilchen zu schaffen, sind bei uns im Gange<sup>3)</sup>.

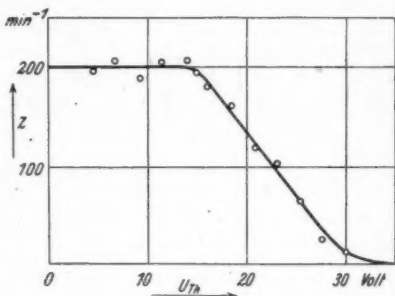


Abb. 7. Intensitätsverteilung einzelner Lichtblitze im CdS-Ag-Einkristall

### 3. Die Gleichstrommethode

Die Untersuchungen an einzelnen  $\alpha$ -Teilchen lassen erkennen, daß auch die Messung der Energie von vielen  $\alpha$ -Teilchen mit Hilfe von Leuchtstoffen im kontinuierlichen Meßverfahren möglich sein muß. Um darüber Näheres zu erfahren, wurde der Leuchtstoffleck am Boden des Glaszylinders der Abb. 1 bis auf 30-40 = 1200 mm<sup>2</sup> vergrößert. Man kann dann ohne wesentlichen Fehler annehmen, daß vom Po-Präparat eine um das Flächenverhältnis 1200 : 27,5 größere Energie auf den Leuchtstoff fällt. Auf diese Weise errechneten wir, daß nunmehr beim Druck  $p = 0$  eine gesamte kinetische Energie von etwa 36000 MeV/min. im Leuchtstoff absorbiert wird, was etwa 100 pro sec. auftreffenden  $\alpha$ -Teilchen entspricht. Von ihrer Energie wurde ein gewisser Teil in Licht umgewandelt und mit Hilfe der Gleichstrommethode nachgewiesen, d. h. es wurde der im Vervielfacher durch die sich überlagernden Lichtblitze erzeugte Gleichstrom gemessen. Es zeigte sich, daß der im Vervielfacher angeregte Strom von  $10^{-8}$  Amp. noch gut nachweisbar war.

<sup>3)</sup> Anmerkung bei der Korrektur: Inzwischen wurden diese Versuche bei uns abgeschlossen. Eine Mitteilung über die Ergebnisse der Messungen ist z. Z. in dieser Zeitschrift im Druck.



Allerdings trat eine gewisse Schwankung dadurch auf, daß der auch noch bei starker Kühlung etwa in derselben Größenordnung liegende Dunkelstrom nicht ganz konstant gehalten werden konnte. Zur Prüfung der Linearität zwischen Lichtintensität und Energie der  $\alpha$ -Strahlung wurde auch hier durch Druckerhöhung die

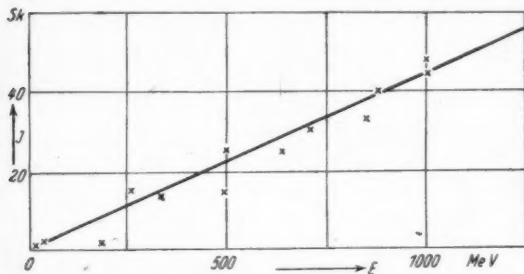


Abb. 8. Zusammenhang zwischen der gesamten erzeugten Helligkeit und der gesamten Energie der  $\alpha$ -Teilchen

erzeugt wird, ist also unabhängig von der Energieverteilung stets ein Maß für die Gesamtenergie der  $\alpha$ -Strahlung. Damit können mit Hilfe von Leuchtstoffen in sehr viel einfacherer Weise als mit einer Ionisationskammer beliebige  $\alpha$ -Präparate geeicht werden.

#### IV. Zusammenfassung

Die im Vorhergehenden mitgeteilten Meßergebnisse zeigen, daß die Leuchtstoffmethode zur Registrierung und Energiemessung sowohl für einzelne als auch viele schwere geladene Teilchen mit gutem Erfolg angewendet werden kann und gegenüber den bisher benutzten elektrischen Methoden (Zählrohr und Ionisationskammer) eine Reihe von Vorteilen besitzt. Einer der wesentlichsten Vorteile besteht darin, daß die Reaktion der  $\alpha$ -Teilchen nicht in einem geschlossenen Gefäß vor sich geht, sondern in der bequem zugänglichen, freiliegenden Leuchtstoffschicht, die ohne irgendwelche Folien verwendet werden kann. Es können ferner, besonders wenn man Zinksulfid als Leuchtstoff benutzt, wegen der relativ kurzen Dauer des Lichtblitzes (Größenordnung  $10^{-6}$  sec) sehr viele Teilchen pro sec registriert werden. Ein weiterer Vorteil der Anordnung für Einzelzählung ist der, daß sie auch dann noch völlig einwandfrei arbeitet, wenn gleichzeitig eine sehr starke  $\gamma$ -Strahlung auf den Leuchtstoff einwirkt. Wir werden hierauf in einer demnächst erscheinenden Arbeit näher eingehen. Es kann mit dem gleichen Gerät in der einfachsten Weise durch Einzelregistrierung die Zahl der auftreffenden Teilchen bestimmt und gleichzeitig entweder durch die Größe der Lichtblitze oder aus der Gleichstromintensität die Energie der auffallenden  $\alpha$ -Teilchen gemessen werden. Die Meßgenauigkeit kann noch dadurch erhöht werden, daß man die Lichtblitze in einer Koinzidenzschaltung mit zwei Sekundär-Vervielfacherphotozellen untersucht. Solche Versuche sind bei uns in Vorbereitung<sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> Wir danken den Herren G. Goldbach und K. Hauschild für ihre Mitarbeit bei der Vorbereitung und Durchführung der Messungen.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie.

(Bei der Redaktion eingegangen am 15. April 1948.)

Gesamtenergie der  $\alpha$ -Teilchen in bekannter Weise (Abb. 4) vermindert und die damit verbundene Helligkeitsabnahme festgestellt. Es ergab sich wieder eine Proportionalität zwischen Gesamthelligkeit und Energie der  $\alpha$ -Strahlen in Übereinstimmung mit den Versuchen an einzelnen Lichtblitzen (Abb. 8).

Die Lichtintensität, die von vielen  $\alpha$ -Teilchen

Über  
von

A  
fähig  
Es w  
fließ  
sucht

E  
aufw  
größe  
Ström  
Wert  
Strah  
als d  
(groß  
chen  
fakt  
wurd  
auch  
stalle  
ordn

B  
fläche  
strah  
daß  
mit  
ein  
se  
viele  
Elekt  
beru  
negat  
gezog  
D  
einflu

# **Über den Verstärkungseffekt der elektrischen Leitfähigkeit von Cadmiumsulfid-Kristallen bei Bestrahlung mit $\alpha$ -Teilchen, Elektronen und $\gamma$ -Quanten**

*(Eine Methode zur Zählung einzelner Teilchen)*

Von H. Kallmann und R. Warminsky

(Mit 4 Abbildungen)

## **Inhaltsübersicht**

An größeren CdS-Kristallstücken wurden Messungen der elektrischen Leitfähigkeit bei Anregung durch  $\alpha$ -Teilchen, Elektronen und  $\gamma$ -Quanten durchgeführt. Es wurden sowohl die bei kontinuierlicher Bestrahlung quer durch den Kristall fließenden Ströme als auch die durch einzelne Teilchen erzeugten Impulse untersucht. Folgende Ergebnisse wurden erzielt:

Ein hohes Leitvermögen zeigten nur Kristalle, die auch eine starke Lumineszenz aufwiesen. Die an gering leuchtenden Kristallen gemessenen Ströme entsprachen größenordnungsmäßig der Zahl der pro sec erregten Elektronen, während die Ströme in gut leuchtenden Kristallen ein hohes Vielfaches dieses berechneten Wertes betrugen (Verstärkungsfaktor). Selbst nach Ausschaltung der erregenden Strahlung war die dann noch transportierte Elektrizitätsmenge oft sehr viel größer als die überhaupt während der ganzen Bestrahlungszeit erregte Elektronenzahl (große Beweglichkeit langlebiger Elektronen). Die Versuche mit einzelnen Teilchen ergaben, daß ein kurzzeitiger Ladungstransport mit hohem Verstärkungsfaktor nur bei wenigen Kristallen vorhanden war. Durch ein einzelnes  $\alpha$ -Teilchen wurden Aufladungen von nahezu 10 Volt erzeugt. An solchem Kristall konnten auch die Stromstöße einzelner Elektronen beobachtet werden. Die meisten Kristalle zeigten kurzzeitige Stromstöße mit einem Ladungstransport von der Größenordnung der durch das Teilchen erregten Elektronenmenge.

Bei Beschießung mit  $\alpha$ -Teilchen, die den Kristall nur in der Nähe der Oberfläche erregen, traten große Ströme bzw. Impulse nur dann auf, wenn die Bestrahlung von der negativen Elektrode her erfolgte (Gleichrichtereffekt). Das zeigt, daß die Träger des Leitungsstromes offenbar Elektronen sind. Bei Bestrahlung mit energiereichen Elektronen, die den Kristall nahezu gleichmäßig erregen, war ein solcher Gleichrichtereffekt nicht vorhanden. Die Ströme bei Anregung durch viele oder einzelne  $\alpha$ -Teilchen ließen auch — im Gegensatz zur Anregung durch Elektronen — eine starke Abhängigkeit von der Größe des Feldes erkennen. Sie beruht darauf, daß die  $\alpha$ -Erregung nur an einer Elektrode stattfindet und die negative Ladung von der positiven getrennt und durch den Kristall hindurchgezogen werden muß.

Das Leitvermögen konnte durch Vorbehandlung des Kristalls wesentlich beeinflusst werden. Nach Vorbestrahlung mit ultrarotem Licht war der bei Erregung

durch  $\alpha$ -Strahlen fließende Strom um mehrere Zehnerpotenzen kleiner. Bestrahlung mit sichtbarem Licht dagegen hatte bei anschließender Erregung einen Strom mit hohem Verstärkungsfaktor zur Folge. Vor der Erregung muß ein nicht zu kleiner Ruhestrom im Kristall fließen, wenn bei der darauf folgenden Bestrahlung mit  $\alpha$ -Teilchen oder Elektronen ein hoher Verstärkungsfaktor auftreten bzw. der Strom schnell einsetzen soll. Durch Licht, aber auch durch Elektronen oder in schwächerem Maße durch  $\alpha$ -Strahlen kann im Kristall eine Vorerregung (durchgehende Leitfähigkeitsbänder) geschaffen werden; durch Ultrarot können die Elektronen dieser Leitfähigkeitsbänder wieder „ausgeleuchtet“ werden.

Die beobachteten Erscheinungen werden nicht durch eine Stoßerregung erklärt. Es wird vielmehr angenommen, daß das hohe Leitvermögen der meisten Kristalle bedingt ist durch das Vorhandensein langlebiger Elektronen mit relativ großer Beweglichkeit, sog. „Phosphoreszenzelektronen“, die metallische Leitfähigkeitsbänder durch den ganzen Kristall hindurch bilden (Leitfähigkeitsbänder der langlebigen erregten Elektronen).

### I. Einleitung und Versuchsanordnung

An Cadmiumsulfid-Einkristallen, die nach dem Verfahren von R. Frerichs<sup>1)</sup> hergestellt worden waren, hatten R. Frerichs und R. Warminsky<sup>2)</sup> gefunden, daß bei Bestrahlung mit  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen in den Kristallen eine zusätzliche elektrische Leitfähigkeit auftritt, ähnlich der Photoleitfähigkeit, die einsetzt, wenn man die Kristalle bei normaler Temperatur mit Licht von einer Wellenlänge um oder unterhalb 5200 Å bestrahlt. Frerichs hatte weiter gefunden, daß die erzeugte Leitfähigkeit bei zusätzlicher Bestrahlung mit Ultrarot zurückging. Zu den Versuchen wurden dünne Kristalle, die auf der einen Seite mit zwei aus aufgedampftem Aluminium bestehenden Elektroden versehen waren, verwendet. Der spaltförmige Zwischenraum zwischen den beiden Aluminiumelektroden betrug einige Zehntel mm, seine Länge etwa 1 cm.

Das wesentlichste Resultat der bisherigen Versuche ist in der Tatsache zu sehen, daß bei dieser Leitfähigkeit ein sogenannter Verstärkungseffekt auftritt. Berechnet man nämlich die Gesamtzahl aller Elektronen, die bei Bestrahlung mit  $\alpha$ -,  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Strahlen in einem Kristall überhaupt erregt werden, so wäre die nächstliegende Annahme die, daß der gesamte elektrische Strom, der bei Anlegung eines Feldes in dem Kristall fließt, mit wachsender Spannung einem Sättigungswerte zustrebt, der gleich der Zahl der pro sec erregten Elektronen ist, ähnlich wie bei der Ionisationskammer. Es hat sich aber gezeigt, daß der bei diesen Bestrahlungen im Kristall fließende Strom ein hohes Vielfaches des so errechneten Stromes betrug. Ströme mit so hohem Verstärkungsfaktor sind zum ersten Male von Frerichs und Warminsky<sup>2)</sup> beobachtet worden.

Wir haben diesen Verstärkungseffekt nunmehr noch nach anderen Richtungen hin untersucht, und zwar ermittelten wir seine Größe sowohl bei Erregung durch ein einziges Teilchen als auch bei Erregung durch viele Teilchen und bestimmten seine Abhängigkeit von der Beschaffenheit des Kristalls, seiner Vorbehandlung und der Stromrichtung im Kristall. Dabei hat es sich gezeigt, daß man diese Leit-

<sup>1)</sup> R. Frerichs, Naturwiss. **33**, 281 (1946).

<sup>2)</sup> R. Frerichs u. R. Warminsky, Naturwiss. **33**, 251 (1946); Physiol. Rev. (Am.) im Druck.

fähigkeitserhöhung bei geeigneten Kristallen in sehr bequemer Weise zur Zählung und Energiebestimmung einzelner Teilchen verwenden kann.

Diese Versuche wurden im wesentlichen an Kristallen von 0,05 bis etwas über 0,1 mm Dicke durchgeführt. Die Fläche der Kristalle betrug bis zu einigen qcm. Um saubere Feldverhältnisse zu erhalten und Oberflächeneffekte zu vermeiden, wurde von der Spaltanordnung abgegangen und der Kristall auf beiden Seiten mit aufgedampften Aluminiumelektroden versehen (Abb. 1). Die Schichtdicke der Aluminiumelektroden war stets dünner als  $\frac{1}{10}$  mg Massenbelegung/qcm, so daß die Elektroden selbst von  $\alpha$ -Teilchen praktisch ohne Energieverlust durchgesetzt wurden. Beide Elektroden überdeckten sich mit einer Fläche von etwa 5 qmm in der Kristallmitte. Wie wir uns durch besondere Versuche mit  $\alpha$ -Teilchen und Elektronen überzeugt haben, war der wirksame Teil des Kristalles durch diese sich überdeckende Fläche der Elektroden gegeben. Durch Abdecken der übrigen Teile des Kristalles zum Schutz gegen Bestrahlung traten keine meßbaren Unterschiede in den Stromwerten auf. Es war also gleichgültig, ob der ganze Kristall oder nur der sogenannte wirksame Teil der Bestrahlung ausgesetzt war. Die mit solchen Kristallen erzielten Resultate wurden auch noch mit Messungen an einseitig bedampften Kristallen mit spaltförmigem Zwischenraum verglichen (Spaltzellen).

Ein Ergebnis unserer Versuche sei schon hier mitgeteilt: Es zeigte sich, daß alle Resultate von Kristall zu Kristall außerordentlich verschieden waren, und kaum jemals völlig übereinstimmende Ergebnisse an zwei verschiedenen Kristallstücken gefunden wurden. Wie in einer kürzlich erschienenen Arbeit<sup>3)</sup> schon näher ausgeführt wurde, wiesen aber durchweg die Kristalle, die auch eine besonders gute Lumineszenz im Gebiet der roten Grenze des sichtbaren Spektrums bzw. im nahen Ultrarot besaßen, den größten Verstärkungseffekt auf. Diejenigen Kristalle, bei denen fast alle erregten Elektronen ihr Licht ausstrahlten, zeigten ein besonders hohes Leitvermögen. Dagegen ließen Kristalle, die nur wenig lumineszierten, meistens ein sehr schlechtes Leitvermögen erkennen. Es wurden daher für die folgenden Versuche immer eine Reihe gut lumineszierender und eine Reihe besonders schlecht lumineszierender Kristalle verwendet. Das Emissionsvermögen der schlecht lumineszierenden Kristalle war etwa 100mal kleiner als das der gut lumineszierenden.

Zwei verschiedene Versuchsreihen wurden durchgeführt. Einmal wurde die Stromerhöhung bei kontinuierlicher Erregung ermittelt, d. h. eine der Kristallflächen wurde mit einer großen Anzahl  $\alpha$ -Teilchen oder Elektronen beschossen und der dadurch erzeugte Gesamtstrom gemessen. Außerdem wurden Versuche mit einzelnen Teilchen, insbesondere mit einzelnen  $\alpha$ -Teilchen, durchgeführt. Zu diesem Zweck wurde eine variable Spannung von 10—200 Volt über einen Widerstand von 1 MOhm an den Kristall gelegt und der durch ein einzelnes Teilchen hervorgerufene Stromstoß als Spannungsänderung am Widerstand gemessen. Dieser Spannungsstoß wurde über einen Verstärker geleitet und mit einem Oscillographen beobachtet. Es wurde maximal mit einer Verstärkung von etwa 30000 gearbeitet; bei einigen Kristallen war nur ein Bruchteil dieser Verstärkung notwendig.

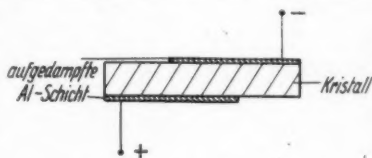


Abb. 1. Anordnung der Elektroden

<sup>3)</sup> H. Kallmann u. R. Warminsky, Ann. Phys. (z. Z. im Druck).

Für Messungen mit kontinuierlicher Erregung wurden ein Polonium- und ein Elektronenstrahl-Präparat verwendet. Das Poloniumpräparat sandte pro 1 qcm Fläche etwa 4 Millionen  $\alpha$ -Teilchen/sec aus. Bei einer wirksamen Kristallfläche von 5 qmm trafen also etwa 200000 wirksame  $\alpha$ -Teilchen/sec auf den Kristall. Jedes  $\alpha$ -Teilchen erzeugt in einem solchen Kristall rund  $5 \cdot 10^5$  erregte Elektronen. Dies bedeutet also, daß pro sec etwa  $10^{11}$  erregte Elektronen erzeugt werden, die einem Sättigungsstrom von  $1,5 \cdot 10^{-8}$  Amp entsprechen würden. Bei der Bestrahlung mit Elektronen trafen von dem von uns verwendeten Elektronenstrahl-Präparat etwa  $10^6$  energiereiche Elektronen/sec den Kristall. Jedes energiereiche Elektron erzeugt bei seinem Durchtritt durch den Kristall etwa  $10^4$  erregte Elektronen, so daß man mit einer Gesamtzahl von etwa  $10^{10}$  erregten Elektronen/sec oder einem Sättigungsstrom von  $10^{-9}$  Amp zu rechnen hat. Der nicht sehr genauen geometrischen Bedingungen wegen stellt diese Zahl nur eine rohe Angabe dar.

## II. Versuche bei kontinuierlicher Anregung

### a) Leitvermögen von Kristallen mit geringem Emissionsvermögen<sup>3)</sup>

Bei Kristallen, die nur eine geringe Lichtemission zeigten, war der Strom bei der oben angegebenen  $\alpha$ -Bestrahlung stets kleiner als  $3 \cdot 10^{-8}$  Amp, bei der entsprechenden Bestrahlung mit Elektronen kleiner als  $10^{-9}$  Amp. Dabei lag im allgemeinen am Kristall eine Spannung von 100 Volt. Die transportierte Strommenge ist in diesen Fällen also von der gleichen Größenordnung wie die Wahl der im Kristall pro sec erregten Elektronen. Die Ströme waren nicht sehr erheblich von der Spannung abhängig. Versuche mit Kristallen, die nur auf einer Seite Elektroden trugen (Spaltzellen), ergaben ähnliche Werte.

### b) Leitvermögen von Kristallen mit gutem Emissionsvermögen

Ganz anders waren die Resultate bei Kristallen mit starker Lumineszenz. Diese Kristalle zeigten im allgemeinen eine erhebliche höhere elektrische Leitfähigkeit, als die gering-lumineszierenden, d. h. sie besaßen einen hohen Verstärkungsfaktor. Allerdings waren die Ströme von Kristall zu Kristall außerordentlich unterschiedlich, obwohl ihre wirksamen Flächen, Dicke und Leuchtfähigkeit

Tabelle 1

Charakterisierung des Kristalls	Kristall einseitig mit Elektroden versehen (Spalt)			Kristall beiderseitig mit Elektroden versehen			
Nr. des Kristalls . . .	151	152	153	51	52	53	54
Dicke des Kristalls in mg/cm <sup>2</sup> . . . . .	26	26	150	53	60	26	33
Dicke des Kristalls in mm . . . . .	0,054	0,054	0,31	0,11	0,125	0,054	0,069
Spalt bzw. bedampfte Fläche: Länge in mm	8	10	6	2,5	2,8	4,7	2,7
Spalt bzw. bedampfte Fläche: Breite in mm	0,5	0,7	0,7	2	2	2	2
Wirksame Fläche in mm <sup>2</sup>	4	7	4,2	5	5,6	9,4	5,4
Strom i. A. erzeugt durch Elektronen . . . . .	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
Strom i. A. erzeugt durch $\alpha$ -Strahlen . . . . .	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$

nur g  
Leitfä  
sicher  
komm  
Spann  
stalle  
Wie n  
als es

Fe  
Feldr  
die ei  
Das b  
den n  
außer  
negat  
richte  
kaum

Neg

Die a  
mit E  
mit d  
etwa  
Strom  
gesch  
der n  
ziehe  
Nach  
stall,  
lang  
die a  
wenn  
B  
dauer  
unter

4)  
5)



nur geringe Unterschiede aufwiesen. Ob ein Kristall eine große oder eine kleine Leitfähigkeit besitzt, hängt, wenn er überhaupt eine starke Lumineszenz aufweist, sicherlich noch von anderen Umständen ab, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen. In Tabelle 1 sind einige Werte zusammengestellt, die alle bei einer Spannung von 100 Volt aufgenommen wurden. Untersuchungen an anderen Kristallen, die nicht in die Tabelle 1 aufgenommen sind, gaben ganz analoge Werte. Wie man sieht, sind die Ströme zum Teil sehr viel größer — bis zum 10000fachen —, als es der Zahl der pro sec erregten Elektronen entsprechen würde.

### c) Abhängigkeit des Stromes von der Feldrichtung

Es wurde sodann untersucht, inwieweit die erhaltenen Stromwerte von der Feldrichtung abhingen. Die Ströme waren verschieden, je nachdem ob man die eine oder die andere Seite des Kristalls mit der positiven Elektrode verband. Das beruht wahrscheinlich darauf, daß die auf den Kristall aufgedampften Elektroden nicht völlig gleichmäßig waren. Bei Anregung durch  $\alpha$ -Teilchen zeigte sich aber außerdem ganz deutlich, daß der Strom immer dann besonders groß war, wenn die negative Elektrode auf der Seite lag, auf der die  $\alpha$ -Teilchen eintraten (Gleichrichter-Effekt). Bei Elektronenbeschuß war eine solche Richtungsbevorzugung kaum vorhanden. Tabelle 2 zeigt diesbezügliche Messungen an einem Kristall.

Tabelle 2

Meßanordnung		Strom in $\mu$ Amp	
Negativer Pol an Seite	Strahlung dringt ein von Seite	bei Bestrahlung mit Elektronen <sup>a)</sup>	bei Bestrahlung mit $\alpha$ -Teilchen <sup>b)</sup>
A	A	350	70
A	B	300	2
B	B	180	40
B	A	160	2

Die angelegte Spannung betrug 100 Volt. Aus den Stromwerten bei Bestrahlung mit Elektronen erkennt man, daß die Leitfähigkeit größer ist, wenn die Elektrode A mit dem negativen Pol verbunden ist. Bei umgekehrter Polung ist der Strom nur etwa halb so groß. Die entsprechenden Messungen mit  $\alpha$ -Strahlen zeigen, daß der Strom in sehr starker Weise davon abhängt, von welcher Seite die  $\alpha$ -Teilchen eingeschossen werden. Der Strom war etwa 30mal größer, wenn die  $\alpha$ -Teilchen von der negativen Elektrode her eingeschossen wurden. Diese hohen Stromwerte beziehen sich immer auf das Einsetzen des Stromes beim Einschalten der Spannung. Nach  $\frac{1}{2}$  Minute war der Strom, wahrscheinlich infolge von Aufladungen im Kristall, schon auf den zehnten Teil abgeklungen. Wurde das Feld einige Sekunden lang abgeschaltet, so erhielt man aber nach erneutem Einschalten immer wieder die alten Stromwerte. Diese hohen Stromwerte waren, wie gesagt, nur erhältlich, wenn die  $\alpha$ -Teilchen auf der Seite der negativen Elektrode eintraten.

Bei Elektronen war eine so erhebliche Abhängigkeit des Stromes von der Zeitdauer nach dem Einschalten nicht vorhanden. Dies erklärt sich, wie wir weiter unten sehen werden, daraus, daß der  $\alpha$ -Teilchen-Strom sehr stark, der durch

<sup>a)</sup> Stromwert abgelesen nach etwa 10 Min.

<sup>b)</sup> Stromwert abgelesen sofort nach Anlegen der Spannung.

Elektronen erzeugte Strom dagegen nur wenig von der Spannung abhängig ist. Nun wird infolge von Aufladungen das am Kristall liegende wirksame Feld heruntersgesetzt. Infolgedessen setzt die Aufladung auch den durch  $\alpha$ -Strahlen erzeugten Strom erheblich herunter, während sie den durch Elektronen erzeugten nur wenig beeinflusst.

#### d) Abhängigkeit des Stromes von der Feldstärke

Weitere Messungen zeigten, vor allem bei Anregung durch  $\alpha$ -Teilchen, eine Abhängigkeit des Stromes von der Spannung, die besonders deutlich bei Messungen an Einzelteilen hervortrat. Diese Abhängigkeit von der Spannung wird aber leicht durch eine beim Stromdurchgang im Kristall sich bildende Aufladung verdeckt. Es entsteht eine Raumladung, die den Stromdurchgang heruntersetzt. Man erkennt dies, wenn die Spannung für einige Zeit abgeschaltet wird oder noch besser, wenn die Elektroden kurzgeschlossen werden, so daß die Raumladung abfließen kann. Bei neu eingeschalteter Spannung ist der Strom immer besonders groß. Infolge der Aufladung ist die tatsächlich am Kristall liegende wirksame Spannung meistens wesentlich kleiner als die außen angelegte Spannung.

Bei Bestrahlung mit  $\alpha$ -Teilchen ist eine erhebliche größere Spannungsempfindlichkeit vorhanden als bei Elektronenerregung. Offenbar muß bei Anregung durch  $\alpha$ -Strahlen erst ein geeignetes Feld vorhanden sein, um die an der Oberfläche erzeugten Elektronen von der positiven Ladung zu trennen und durch den Kristall hindurchzuziehen.

#### e) Einfluß durch Vorbelichtung mit Ultrarot

Bei diesen Versuchen zeigte sich mit großer Deutlichkeit noch folgendes: Belichtete man den Kristall — vor der Bestrahlung mit  $\alpha$ -Teilchen — mit ultrarotem Licht, so war der Strom, den man bei  $\alpha$ -Teilchenbeschuß erhielt, wesentlich kleiner

Tabelle 3

Kristall Nr.	Strom in A <sup>6)</sup>	
	nach Ausleuchtung mit Ultrarot	nach Anregung mit sichtbarem Licht
51	$2 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$
52	$< 1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$
53	$5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-4}$

als ohne Ultrarot-Vorbestrahlung. Bei Elektronen-anregung war der Strom bei manchen Kristallen nach Ultrarotvorbestrahlung ebenfalls kleiner, stieg jedoch bei dauernder Elektronen-erregung bald wieder auf den früheren Wert an. Eine genügend lange mit ultrarotem Licht vorbestrahlte Zelle zeigt also nach der Ultrarot-Bestrahlung bei Anregung mit  $\alpha$ -Teilchen keinen Verstärkungseffekt mehr (siehe Tabelle 3). Bestrahlte man diese so unwirksam gemachte Zelle nunmehr aber mit sichtbarem Licht — ohne Spannung am Kristall und ohne Einwirkung von  $\alpha$ -Teilchen — und maß dann nach Abschalten des sichtbaren Lichtes wieder den durch  $\alpha$ -Strahlen angeregten Strom, so wurde erneut ein hoher Stromwert erhalten. Der Verstärkungseffekt erreichte wieder den alten Wert, wenn man genügend lange mit sichtbarem Licht bestrahlte. Vorbestrahlung des Kristalls mit Ultrarot vernichtete also den Verstärkungseffekt, genügend lange Vorbestrahlung mit sichtbarem Licht

<sup>6)</sup> bei Anregung durch  $\alpha$ -Strahlen.



stellte ihn wieder her bzw. machte ihn besonders groß. Ganz analoge Ergebnisse wurden bei Versuchen mit einzelnen  $\alpha$ -Teilchen erzielt (siehe weiter unten).

Folgendes wurde noch festgestellt: Der durch  $\alpha$ -Teilchen erzeugte Strom war um so größer, je größer der vor der Beschießung mit  $\alpha$ -Teilchen fließende Dunkelstrom war. Dabei war der Strom aber keineswegs nur um den Betrag des Dunkelstromes vermehrt, sondern betrug z. B. der Dunkelstrom  $10^{-8}$  Amp, so war der nachträgliche  $\alpha$ -Teilchen-Strom  $10^{-7}$  Amp, war der Dunkelstrom  $10^{-8}$  Amp, so betrug der  $\alpha$ -Teilchen-Strom nachher über  $10^{-6}$  Amp. Der Verstärkungsfaktor multiplizierte sich also mit einer Zahl, die in größter Näherung proportional dem Dunkelstrom war. Es handelte sich mithin nicht um eine Addition des Dunkelstromes zu dem durch  $\alpha$ -Strahlung erregten Strom. Damit also der  $\alpha$ -Teilchen-Strom überhaupt einsetzen konnte, war es ganz offenbar notwendig, daß zwischen den Elektroden schon ein gewisser Strom floß; sonst konnten die durch die Teilchen an der einen Oberfläche erzeugten Ladungen nicht durch den Kristall hindurchwandern. Es sei aber betont, daß der durch Vorbestrahlung mit sichtbarem Licht erzeugte Ruhestrom, der vor der Erregung mit  $\alpha$ -Teilchen oder Elektronen floß, in allen Fällen sehr viel kleiner als der durch  $\alpha$ -Strahlen- oder Elektronenerregung erzeugte Strom war.

Diese Versuche zeigen also, daß schon eine genügende Anzahl von erregten Zentren im Kristall vorhanden sein muß, damit bei Anregung durch  $\alpha$ -Teilchen ein elektrischer Strom mit hohem Verstärkungsfaktor fließen kann. Dies wird auch noch durch folgende Versuche bestätigt: Man kann diese Erregungszentren nicht nur durch Bestrahlung mit sichtbarem Licht erzeugen, sondern auch durch  $\alpha$ -Teilchen-Bestrahlung selber. Setzte man den Kristall ohne Spannung nach der Ultrarot-Bestrahlung genügend lange einer Bestrahlung mit  $\alpha$ -Teilchen aus, so wurde der Strom, der bei Anlegen des Feldes einsetzte, immer größer. Es ist also so, daß entweder die durch die  $\alpha$ -Teilchen an der einen Kristallfläche erregten Zentren durch den ganzen Kristall hindurchdiffundieren oder, diese Möglichkeit muß man auch noch berücksichtigen, daß das von der  $\alpha$ -Teilchenenerregung herührende rote Licht eine Vorerregung im Kristall erzeugt. Diese Wiederherstellung des hohen Leitvermögens des Kristalls durch  $\alpha$ -Teilchenbeschuß dauerte im allgemeinen viele Stunden. Man konnte die hohe Leitfähigkeit aber auch durch Elektronenbestrahlung wieder hervorrufen. Hier genügte es schon, den Kristall nur relativ kurze Zeit einer Elektronenstrahlung auszusetzen, um nachher mit  $\alpha$ -Teilchen hohe Verstärkungsfaktoren zu erhalten. Man kann also die durch ultrarote Vorbelichtung erzeugte Vernichtung des Leitvermögens sowohl durch lang dauernden  $\alpha$ -Teilchenbeschuß als auch durch Elektronenbeschuß und durch sichtbares Licht wieder rückgängig machen.

#### f) Beweglichkeit und Verstärkungsfaktor langlebiger metastabiler Elektronen

Es scheint aus den bisherigen Messungen hervorzugehen, daß langlebige erregte Elektronen, die durch ultrarotes Licht ausgeleuchtet werden können—daher nennen wir diese Elektronen „Phosphoreszenz-Elektronen“—, für das Zustandekommen oder Einsetzen eines hohen Leitungsstromes notwendig sind. Man möchte annehmen, daß ein solcher Einfluß aber nur dann möglich ist, wenn diese „Phosphoreszenz-Elektronen“ selber schon eine Beweglichkeit im Kristall besitzen, wie dies ja auch aus dem beträchtlichen Ruhestrom, den man mißt, hervorzugehen scheint. Diese Beweglichkeit der langlebigen Elektronen haben wir

auf folgende Weise besonders nachgewiesen: Wir haben das Präparat eine bestimmte Zeit lang mit energiereichen Elektronen beschossen und den Anstieg des Stromes gemessen. Dann nahmen wir das Elektronenpräparat fort und bestimmten den danach noch fließenden Strom als Funktion der Zeit. Die gesamte, bis zu einer gewissen Zeit transportierte Ladung verglichen wir mit der Zahl der Elektronen, die durch die schnellen Elektronen im Kristall erregt worden war. Der Ruhestrom war vor der Belichtung genügend klein, so daß die gemessenen Ströme immer noch ein Vielfaches des ursprünglichen Ruhestromes betrugen. (Mit Ruhestrom bezeichnen wir denjenigen Strom, der vor Beginn der Bestrahlung schon vorhanden und von der früheren Behandlung der Kristalle abhängig ist. Er ist, wie gesagt, im allgemeinen sehr klein gegen die durch  $\alpha$ -Strahlen oder Elektronen erregten Ströme). Diese Versuche ergaben, daß es gut leitende Kristalle gibt, die eine sehr geringe Nachwirkung haben, während andere Kristalle mit

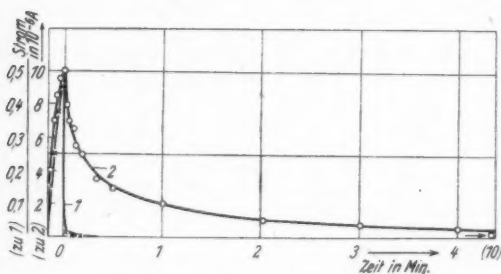


Abb. 2. Induzierter Strom nach Beendigung der Erregung

in sekundär erregte Elektronen umgerechnet —  $10^{-8}$  Amp · sec<sup>7)</sup>). Man sieht, daß nach 10 sec Bestrahlung der Strom bei beiden Kristallen noch keineswegs den Grenzwert erreicht hatte. (Auf dieses langsame Ansteigen kommen wir noch weiter unten zu sprechen.) Während das Einsetzen des Stromes bei beiden Kristallen nicht sehr unterschiedlich war, zeigten die Kristalle nach Fortnahme der Bestrahlung ein vollkommen verschiedenes Verhalten. Der Strom des trägheitslosen Kristalles ging praktisch sofort auf den ursprünglichen Ruhestrom zurück. Dagegen floß durch den trägen Kristall, der trotz Vorbestrahlung mit Ultrarot schon einen erheblichen Ruhestrom aufwies, nach der Anregung mit Elektronen noch ziemlich lange ein relativ großer Strom, und zwar war die gesamte nach der Bestrahlung transportierte Ladungsmenge, abzüglich der durch den Ruhestrom transportierten Ladung, über 1000 mal größer als die Zahl der überhaupt bei der Bestrahlung erregten Elektronen.

### III. Versuche mit Einzelteilchen

#### a) Impulsgröße bei gering leuchtenden Kristallen

Es wurden nun analoge Versuche mit einzelnen  $\alpha$ -Teilchen und auch mit einzelnen  $\gamma$ -Quanten durchgeführt<sup>8)</sup>. An Kristallen mit geringer Lumineszenz konnten

<sup>7)</sup> Der Teil der Abb. 2 links von der O-Achse gibt den Anstieg des Stromes bei Bestrahlung, zur Zeit 0 wird die Strahlungsquelle entfernt.

<sup>8)</sup> Schon Frerichs u. Warminsky l. c. haben auf die Möglichkeit solcher Versuche hingewiesen.

wir bei genügend hoher Verstärkung (Verstärkungsgrad des zur Übertragung der Stromimpulse benutzten Verstärkers etwa 30000) einzelne durch  $\alpha$ -Teilchen erzeugte Stromimpulse wahrnehmen. Lagen 100 Volt Spannung an dem Kristall, so wurden durch die Stromimpulse an einem Widerstand von 1 MOhm Spannungsänderungen von einigen Millivolt hervorgerufen. Bei zeitlicher Auflösung derselben im Oscillographen ergaben sich Abklingzeiten in der Größenordnung von  $10^{-6}$  sec. Bei einer Kapazität von etwa 100 cm am Eingang des Verstärkers trat, wie gesagt, eine Spannung von  $10^{-2}$  bis  $10^{-3}$  Volt auf, was einer Ladung von  $10^{-12}$  bis  $10^{-13}$  Coulomb entspricht. Nun erzeugt ein einzelnes  $\alpha$ -Teilchen in einem solchen Kristall etwa  $5 \cdot 10^5$  Elektronen, entsprechend etwa  $10^{-13}$  Coulomb. Ganz roh war der Ladungstransport bei einem solchen Stromstoß also etwa gleich der Zahl der durch ein  $\alpha$ -Teilchen erregten Elektronen. Von einem erheblichen Verstärkungsfaktor war mithin bei diesen kurzzeitigen Einzelstößen nicht die Rede. Wenn man  $\alpha$ -Teilchen gleicher Energie verwandte, erhielt man bei allen Stößen ungefähr gleich große Ausschläge, so daß diese Impulse zur Bestimmung der Energie von  $\alpha$ -Teilchen geeignet zu sein scheinen. Die Größe dieser Impulse war praktisch unabhängig davon, ob der Kristall vorher mit Ultrarot bestrahlt war oder nicht und auch unabhängig davon, ob die  $\alpha$ -Teilchen von der positiven oder negativen Elektrode her in den Kristall hinein geschossen wurden.

#### b) Impulsgröße bei stark leuchtenden Kristallen

Stark leuchtende Kristalle zeigten zum Teil ein ganz andersartiges Verhalten. Erstens zeigte es sich, daß die von einzelnen  $\alpha$ -Teilchen erzeugten Impulse größer — teilweise ganz außerordentlich viel größer — waren als die bei den Versuchen unter IIIa. Der beste Kristall, den wir in dieser Hinsicht fanden, ist der Kristall Nr. 52 der Tabelle 1. Bei diesem wurde durch ein  $\alpha$ -Teilchen ein Kondensator von 50000 cm noch bis auf eine Spannung von  $\frac{1}{2}$  Volt aufgeladen, wobei die Dauer des Stromstoßes etwa  $\frac{1}{20}$  sec betrug. Das entspricht einer bei dem Stoß transportierten Elektrizitätsmenge von  $10^{11}$  Elektronen, während die Zahl der im Kristall erregten Elektronen höchstens  $10^6$  betrug. Dieser Stromstoß wies also einen Verstärkungsfaktor von etwa  $10^5$  auf.

Solche großen Einzelimpulse zeigten nun eine starke Abhängigkeit erstens von der Richtung des elektrischen Feldes im Kristall (siehe Tabelle 4), zweitens davon, ob die  $\alpha$ -Teilchen von der negativen oder positiven Seite her eingeschossen wurden. Bei Erregung an der negativen Elektrode waren die Stromimpulse viel größer als bei Erregung an der positiven Elektrode. Hier trat also der bei kontinuierlicher Anregung beobachtete Gleichrichtereffekt in verstärktem Maße auf. Wurden die Elektronen durch das Feld zu der anderen Elektrode gezogen, gab es große Strom-

Tabelle 4

Meßanordnung		Impulsgröße in Volt (Außenwiderst. 1 MOhm Eingangskapaz. 100 cm)
Negativer Pol an Seite	Teilchen dringt ein von Seite	
A	A	2
A	B	0,003
B	B	0,1
B	A	0,002

impulse; mußten hingegen die positiven Ladungen (Löcher) den Strom transportieren, traten nur kleine Stromimpulse auf.

#### c) Abhängigkeit der Impulsgröße von der Spannung

Die Größe der Impulse hängt in hohem Maße von der Feldstärke ab, sie steigt mit wachsender Spannung stark an. Dies erklärt sich einmal daraus, daß die Elektronen um so leichter von der positiven Ladung getrennt und durch den Kristall hindurchgezogen werden, je größer die Feldstärke ist. Bei diesen Messungen muß man aber berücksichtigen, daß sich der Kristall beim Stromdurchgang selber auflädt, und diese Aufladung, wenn kein Stromdurchgang mehr erfolgt, erst allmählich, beim Kurzschließen etwas schneller, abklingt. Die Aufladung erfolgt beim Anlegen der Spannung schon allein durch den Ruhestrom. Durch sie wird die wahre Feldstärke im Kristall wesentlich herabgesetzt. Man konnte die Größe dieser Aufladung bei der Messung der Stromstöße einzelner Teilchen sehr gut auf folgende Weise annähernd bestimmen: Arbeitete man zunächst mit einer Spannung von 100 Volt und setzte diese dann herab, so wurden die Impulse immer kleiner, verschwanden bei etwa 60 Volt und waren bei etwa 50 Volt in umgekehrter Richtung zu sehen. Offenbar hatte sich bei der Klemmenspannung von 100 Volt allmählich ein Gegenfeld von etwa 60 Volt gebildet. Diese entgegengesetzten Impulse waren klein (ohne Verstärkungsfaktor) und kurzzeitig, so wie man sie auch bei umgekehrter Polung erhält. Das Umdrehen der Impulse und damit das Vorhandensein von Aufladungen wurde bei allen Kristallen festgestellt, auch an denen mit geringer Lumineszenz.

#### d) Einfluß der Vorbelichtung mit Ultrarot

Die bei diesen Kristallen auftretenden Einzelstromstöße mit hohem Verstärkungsfaktor zeigten entsprechend den Versuchen unter II e eine starke Abhängigkeit von der Vorbehandlung mit Ultrarot. Waren die Kristalle vor der Erregung mit  $\alpha$ -Strahlen genügend lange mit Ultrarot ausgeleuchtet, so waren die Stromimpulse bis zu 100 mal kleiner als ohne diese vorherige Ausleuchtung. Es war ganz deutlich zu erkennen, daß sich solche großen Stromimpulse mit hohem Verstärkungsfaktor nicht oder nur sehr schlecht ausbilden konnten, wenn der Ruhestrom zu klein war. Eine Bestrahlung mit sichtbarem Licht stellte die Fähigkeit des Kristalls, bei Beschießung mit  $\alpha$ -Teilchen große Stromimpulse aufzuweisen, sofort wieder her.

#### e) Versuche über die Anregung durch einzelne $\gamma$ -Quanten

Schließlich haben wir versucht, die durch einzelne Elektronen bzw.  $\gamma$ -Quanten hervorgerufenen Stromimpulse zu messen. Hier war schon rein überlegungsmäßig der sehr viel geringeren Erregungsdichte wegen, die schnelle Elektronen im Kristall hervorrufen, nur ein 10- bis 100mal kleinerer Effekt zu erwarten. Die Versuche zeigten in der Tat, daß bei unseren besten Kristallen bei Elektronenbeschuß einzelne Stromstöße auftraten. Diese waren aber etwa 100- bis 1000mal kleiner als die größten durch einzelne  $\alpha$ -Teilchen erzeugten Stromstöße. Bei Beschießung mit einzelnen Elektronen war, genau wie bei kontinuierlicher Erregung, kein wesentlicher Einfluß durch vorherige Ultrarot-Bestrahlung zu bemerken; auch die Gleichrichterwirkung bezüglich der Einstrahlrichtung war bei den Messungen mit einzelnen Elektronen nicht vorhanden.

## IV. Deutung der Versuche

Wir sind der Meinung, daß der beobachtete Verstärkungseffekt nicht auf einer Art Stoßionisation oder, besser gesagt, Stoßerregung von Elektronen beruht. Unter einer solchen Stoßerregung verstehen wir, daß die durch die äußere Strahlung erregten Elektronen bzw. „Löcher“ in dem elektrischen Feld auf so hohe Energien beschleunigt werden, daß sie nun ihrerseits weitere Elektronen im Kristall erregen und dadurch die Wahl der erregten Elektronen, die ja für die Leitfähigkeit maßgeblich sind, erhöhen. Folgende Umstände scheinen uns gegen eine solche Annahme zu sprechen: 1. Die an den Kristall gelegten Felder waren relativ klein. Es trat aber selbst bei solchen Feldern, bei denen erst auf einer Strecke von etwa  $10^{-3}$  cm und mehr den Elektronen eine für eine weitere Erregung ausreichende Energie gegeben wurde, ein erheblicher Verstärkungseffekt auf. Dabei waren manche Kristalle selbst nur  $10^{-2}$  cm in der Feldrichtung ausgedehnt. 2. Versuche bei Anregung durch schnelle Elektronen haben gezeigt, daß der Verstärkungseffekt

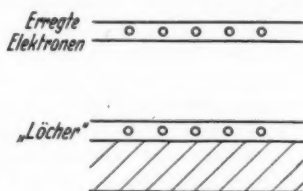


Abb. 3. Schematische Darstellung der Elektronenerregung.

Diese Abbildung ist noch weitgehend idealisiert, indem hier nur von dem unteren und oberen Energieband gesprochen wird. In Wirklichkeit handelt es sich bei den Versuchen, wie wir sehen, um Elektronen verschiedener Lebensdauer, die offenbar in verschiedenen Energiebändern angeordnet sind, so daß man für die langlebigen „Phosphoreszenz-Elektronen“ (siehe weiter unten) ein gesondertes Energieband, sei es oben oder unten, annehmen muß

nicht sehr wesentlich vom Feld abhängig ist. Auch dies scheint uns gegen die Annahme der Stoßerregung zu sprechen. 3. Mit dem Leitfähigkeitsphänomen ist kein zusätzliches Leuchten im Kristall verbunden. Da wir festgestellt haben, daß gerade die Kristalle besonders gut leiten, die auch besonders gut leuchten, sollte man annehmen, daß, wenn der Leitfähigkeitsmechanismus mit einer zusätzlichen Erregung von Elektronen verbunden wäre, auch ein zusätzliches Leuchten auftreten müßte. Wir haben nach einem solchen Leuchten gesucht, aber keines gefunden.

Diese Gründe veranlassen uns, zunächst einen anderen Mechanismus als möglich anzusehen, und zwar wollen wir folgendes Bild benutzen (siehe Abb. 3): Ein Körper zeigt keine (metallische) elektrische Leitfähigkeit, wenn das Band der lockerst gebundenen Elektronen vollbesetzt ist. Dies ist bei den gewöhnlichen Kristallen der Fall. Sie weisen daher im Ruhezustand keine metallische elektrische Leitfähigkeit auf. Bei Bestrahlung mit Licht, Elektronen oder  $\alpha$ -Teilchen wird ein kleiner Teil der Elektronen des untersten Energiebandes in ein höheres Energieband gehoben, wodurch zwei nicht voll besetzte Energiebänder geschaffen werden, die beide prinzipiell zu einer metallischen Leitfähigkeit fähig wären, wenn nur die Zahl und die Beweglichkeit der Elektronen in dem obersten Energieband bzw. die Zahl der fehlenden Elektronen (im folgenden immer als „Löcher“ bezeichnet)



im unteren Energieband genügend groß ist. (Das untere, nicht ganz voll besetzte Energieband wirkt dann bekanntlich so wie ein mit sehr wenig positiven Ladungen besetztes Energieband.) Wir wollen also hier das Bild benutzen, daß diese nicht voll besetzten Energiebänder eine metallische Leitfähigkeit durch den ganzen Kristall ermöglichen<sup>9)</sup>. Damit eine solche auftritt, ist es notwendig, daß sich das die Stromleitung bewirkende Band durch den ganzen Kristall erstreckt und sich in sogenanntes thermisches Potentialgleichgewicht mit den Elektroden setzt, d. h. daß die Energie der energiereichsten Elektronen dieses Bandes gleich der höchsten Energie der Elektronen in den Metallelektroden ist.

Es wäre, wie gesagt, prinzipiell möglich, daß sowohl die Elektronen im oberen Energieband als auch die „Löcher“ im unteren Energieband eine solche Leitfähigkeit bewirken. Das Band aber, das im wesentlichen die Leitfähigkeit trägt, muß im thermischen Gleichgewicht mit den Elektroden stehen. Nun können aber nicht sowohl die Elektronen im oberen wie auch die im unteren Energieband gleich-

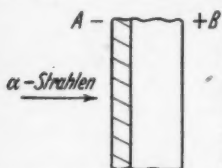


Abb. 4. Mechanismus der  $\alpha$ -Erregung

zeitig mit den Elektroden im Gleichgewicht stehen. Stände beispielsweise das obere Band im Gleichgewicht mit den Elektronen der Elektroden, so würde das untere Band nicht in einem solchen Gleichgewicht stehen. Dadurch würde ein rasches Auffüllen des unteren Energiebandes, also ein rasches Abklingen der Erregung, bewirkt werden. Die Erregung kann aber länger anhalten, wenn die eine Art der Teilchen, z. B. die Löcher, eine wesentlich geringere Beweglichkeit aufweist als die andere, also nicht durch Elektronennachlieferung aus den Elektroden schnell ausgefüllt werden kann. Dann kann in dem einen Band sehr wohl eine Leitfähigkeit entstehen, ohne daß sich die an den Elektroden eintretende Rekombination zu schnell durch den ganzen Kristall hindurch fortpflanzt.

Welches Energieband ist nun bei unseren Versuchen für die Leitfähigkeit verantwortlich? Aus den unter IIc und IIId angegebenen Versuchen geht eindeutig hervor, daß offenbar die Elektronen des oberen Bandes für die große Leitfähigkeit maßgeblich sind. Man kann sich dies an Hand der Abb. 4 erklären. Nur in dem schraffiert gezeichneten Gebiet dieser Figur erregen die  $\alpha$ -Teilchen den Kristall. Damit ein Strom fließt, müssen die Ladungsträger durch den Kristall hindurchgezogen und vor allen Dingen von der positiven Ladung getrennt werden. Wir sehen nun, daß sowohl bei den Versuchen mit kontinuierlicher Bestrahlung als auch bei denen mit einzelnen Teilchen immer dann besonders große Ströme auftreten, wenn die Erregung an der negativen Elektrode vorgenommen wird, wenn also die Elektronen durch den Kristall hindurchgezogen werden. Findet die Erregung an der positiven Elektrode statt, so kann der Strom nur durch die positiven Teilchen (Löcher) getragen werden bzw. höchstens von einer Diffusion der Erregung durch den ganzen Kristall herrühren. Da unsere Versuche eindeutig immer die Erregung an der negativen Seite als bevorzugt erkennen ließen, sind wohl die Elektronen des oberen Bandes als Träger des hohen Leitungsstromes anzusehen. Daß bei Elektronen ein solcher Richtungseffekt nicht oder kaum vorhanden ist, erklärt sich daraus, daß die Elektronen den ganzen Kristall annähernd gleichmäßig durchsetzen, so daß ein Elektronentransport genau so gut stattfinden kann,

<sup>9)</sup> Vgl. hierzu R. W. Pohl u. F. Stöckmann, Ann. Physik. [6] 1 275 (1947).

zte  
gen  
cht  
zen  
das  
sich  
i. h.  
sten

eren  
hig-  
muß  
icht  
ich-  
nda  
den  
and  
urch  
des  
den  
eins  
ge-  
icht  
nnell  
Leit-  
mbi-

ver-  
eutig  
gkeit  
dem  
stall.  
chge-  
Wir  
g als  
auf-  
wenn  
e Er-  
tiven  
r Fr-  
mmer  
al die  
ehen.  
n ist,  
leich-  
lann,



wenn  
geschl

D  
Verst  
kann  
trone  
stärk  
Bestr  
nung  
weil  
gleich  
Krist  
chen.  
Erreg  
hand  
Erreg

D  
Elekt  
so gro  
Zahl  
(das  
rohes  
und v

die an  
Dabei  
Koeff  
bildet  
Dieses  
Erreg  
Temp  
Abhän  
schein

Im  
fähigk  
Nehm  
größ  
leben,  
auch  
Mille  
trotzd  
Leitfä

10)  
Lebens  
Größe

An

wenn die Elektronen von der positiven wie wenn sie von der negativen Seite hineingeschossen werden.

Diese Deutung läßt auch eine Erklärung der unter II d und III c beschriebenen Versuche zu. Damit bei Erregung durch  $\alpha$ -Teilchen eine Leitfähigkeit einsetzen kann, muß die Ladung durch den ganzen Kristall hindurchgezogen, also die Elektronen von der positiven Ladung getrennt werden. Hierzu ist eine erhebliche Feldstärke notwendig. Daher wächst sowohl bei kontinuierlicher als auch bei Einzelbestrahlung der Verstärkungseffekt des Stromes außerordentlich mit der Spannung an. Bei Elektronen war eine solche Spannungsabhängigkeit nicht vorhanden, weil bei diesen die Erregung durch den ganzen Kristall eben schon von vornherein gleichmäßig verteilt ist, und die Elektronen, um eine Leitungsbrücke durch den Kristall zu bilden, nicht von der positiven Raumladung getrennt zu werden brauchen. Dieser charakteristische Unterschied zwischen  $\alpha$ -Strahlen- und Elektronenerregung spricht auch sehr dafür, daß es sich hier nicht um eine Stoßerregung handelt, denn sonst wäre die geringe Spannungsabhängigkeit bei Elektronenerregung nicht verständlich.

Die Elektronen des oberen Bandes sind also so zu betrachten wie die freien Elektronen eines Metalls. Je mehr solche freien Elektronen vorhanden sind, um so größer wird in einem bestimmten Kristall die Leitfähigkeit sein. Nun ist die Zahl der Elektronen, die sich im oberen Band befinden, in allergrößter Näherung (das folgende soll keine irgendwie quantitative Theorie, sondern nur ein ganz rohes Bild sein, um die Verhältnisse zu übersehen) durch die folgende bekannte und viel benutzte Gleichung zu bestimmen,

$$\frac{dn}{dt} = I k - \frac{n}{\tau}, \quad n = e^{-\frac{t}{\tau}} \left( C + \int e^{\frac{t}{\tau}} I k dt \right),$$

die angibt, wie sich die Zahl  $n$  der Elektronen im oberen Band mit der Zeit ändert. Dabei ist  $I$  die Intensität der die Elektronen erregenden äußeren Strahlung,  $k$  ein Koeffizient, der angibt, wieviel Elektronen pro Einheit auffallender Intensität gebildet werden,  $\tau$  die mittlere Lebensdauer der Elektronen in diesem Zustand<sup>10</sup>). Dieses  $\tau$  ist im allgemeinen eine Materialkonstante, die u. U. auch noch von dem Erregungszustand der Elektronen abhängt. Ferner hängt  $\tau$  natürlich von der Temperatur und gegebenenfalls sogar noch von dem Strom und dem Feld ab. Diese Abhängigkeiten wollen wir im folgenden vernachlässigen.  $1/\tau$  ist also die Wahrscheinlichkeit für die Rückkehr eines erregten Elektrons in den Grundzustand.

Im stationären Zustand ist die Zahl  $n$ , die im wesentlichen also für die Leitfähigkeit maßgeblich ist, gleich  $I \cdot k \cdot \tau$  oder bei verschiedenen  $\tau$  gleich  $\sum I_m k_m \tau_m$ . Nehmen wir  $k$  als konstant an, so wird in dieser groben Näherung  $n$  um so größer sein, je größer  $I$  und je größer  $\tau$  ist, d. h. also, Elektronen, die sehr lange leben, werden einen relativ großen Beitrag zur Leitfähigkeit liefern. Wenn daher auch nur wenig langlebige erregte Elektronen gebildet werden, z. B. nur 1 pro Mille aller Elektronen, also  $I \cdot k$  klein ist, so können diese wenigen Elektronen trotzdem — bei genügend langer Lebensdauer — einen erheblichen Beitrag zur Leitfähigkeit liefern, sofern ihre Beweglichkeit nicht zu gering ist.

<sup>10</sup>) In Wirklichkeit brauchen also die langlebigen Elektronen nicht alle die gleiche Lebensdauer zu haben, sondern können auch noch mittlere Lebensdauer verschiedener Größe aufweisen.

Diese Überlegungen scheinen durch die Versuche unter II/ bestätigt zu werden; diese zeigen einmal, daß gerade die Kristalle, bei denen das Leitvermögen eine lange Nachwirkung hatte, besonders große Verstärkungsfaktoren aufweisen, also einen sehr großen Beitrag zur Leitfähigkeit liefern. Überdies zeigen die Versuche über die nach der Erregung transportierte Elektrizitätsmenge, daß die langlebigen Elektronen im Kristall eine genügend große Beweglichkeit besitzen, um merkbare Beiträge zur Stromleitung zu leisten (hätten sie eine sehr schlechte Beweglichkeit, so würde der elektrische Widerstand der Elektronen sehr groß sein). Wir haben diese langlebigen Elektronen als „Phosphoreszenz-Elektronen“ bezeichnet, weil sie wie die aus der Lumineszenz bekannten Phosphoreszenz-Terme die Eigenschaft haben, durch ultrarotes Licht ausleuchtbar zu sein. Der manchmal gefundene relativ hohe Dunkelstrom rührt von ihnen her und kann sehr verringert werden, wenn man genügend stark mit Ultrarot ausleuchtet.

Während man aber die üblichen langlebigen Phosphoreszenz-Elektronen als eingefroren angesehen hat, zeigt es sich hier, daß diese langlebigen Elektronen eine außerordentliche Beweglichkeit durch den Kristall hindurch besitzen und nicht an bestimmten Stellen des Kristalls lokalisiert sind. Es gibt also ganz augenscheinlich ein Leitungsband der langlebigen Phosphoreszenz-Elektronen. Man kann diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Die „langlebigen“ Elektronen befinden sich im oberen Energieband und es ist ihre „Langlebigkeit“ nur dadurch bedingt, daß die „Löcher“ abgeschirmt und lokalisiert sind.

Auch das Ab- wie das Anklingen der Leitfähigkeit wird durch diese Lebensdauer der relativ langlebigen Elektronen bestimmt, wie man ohne weiteres durch Integration der obigen Gleichung erkennen kann. So ist das langsame Anklingen des Stromes, das wir bei unseren Versuchen mehrfach beobachteten, sicherlich eine Folge dieser Erscheinung. Allerdings spielt dabei wahrscheinlich auch noch der Umstand eine Rolle, daß eine gewisse Zeit erforderlich ist, bis sich das Leitfähigkeitsband durch den ganzen Kristall hindurch ausgebildet bzw. sich mit den Elektroden ins Gleichgewicht gesetzt hat (siehe unsere Versuche an Einzelteilchen [IIIb] und die Versuche, bei denen vor der Erregung mit Ultrarot ausgeleuchtet wurde [III d]).

Der Umstand, daß die langlebigen Elektronen einen besonders großen Beitrag zum Leitvermögen liefern, macht uns auch die Tatsache (IIb) verständlich, daß praktisch alle gut leuchtenden Kristalle gut leiten, obwohl bei ihnen, noch bevor das Leitphänomen überhaupt einsetzt, der größte Teil der erregten Elektronen unter Aussendung von Licht schon wieder in den Grundzustand zurückgekehrt ist. Daß bei vielen Kristallen nur ein Teil der erregten Elektronen, und zwar die langlebigen, den ausschlaggebenden Beitrag zu dem Verstärkungseffekt liefert, geht besonders aus der Tatsache hervor, daß gut leuchtende Kristalle (IIb), also gerade Kristalle, bei denen der größte Teil der erregten Elektronen unter Emission von Licht in das untere Band zurückkehrt, auch dann besonders große Verstärkungseffekte aufweisen, wenn bei ihnen, wie wir bei den Einzelimpulsmessungen gefunden haben (IIIb), während der Zeitdauer des Leuchtens keine besondere Leitfähigkeit auftritt (nur einige dieser Kristalle zeigten auch ein kurzzeitiges hohes Leitvermögen). An vielen gut leitenden Kristallen wurden bei der Einzelimpulsmessung kurzzeitige Stromstöße nur bei Anregung an der positiven Elektrode beobachtet. Sie waren immer sehr klein. Am Oscillographen war deutlich zu erkennen, daß bei Anregung an der negativen Elektrode nur ein langzeitiger Ladungstransport vor-

;   
ne   
so   
ne   
n   
re   
t,   
en   
il   
ft   
ne   
n,

als   
en   
nd   
n-   
an   
e-   
ch

er   
te-   
les   
ine   
ler   
ig-   
ek-   
en   
tet

rag   
laß   
vor   
nen   
ist.   
ng-   
eht   
ade   
von   
gs-   
den   
keit   
ver-   
ung   
tet.   
bei   
vor-

han  
Zeit

auch  
kun  
ord  
Ver  
stär  
wie  
Ein

stal  
n u  
erst  
stal  
Kri  
lich  
Akt  
Um  
die  
Da  
fähi  
Leit

2  
mein  
Ele  
Zeit  
ban  
stall

1  
sicht  
die  
phon  
veru  
Stra  
Aust  
He  
der  
leich  
nisse  
den  
therm  
gewi  
völl  
aufw

N  
des  
hind  
täter

handen war. Das Leitfähigkeitsband konnte sich bei diesen Kristallen in kurzer Zeit überhaupt nicht einstellen.

Nur wenige Kristalle, wie z. B. der Kristall Nr. 52 unserer Tabelle 1, zeigen auch kurzzeitig sehr große Stromeffekte. Dieser Kristall zeigte keine Nachwirkung, seine Stromerregung ging sehr schnell herunter, sein Ruhestrom war außerordentlich klein. Bei kontinuierlicher Anregung zeigte er zwar einen erheblichen Verstärkungsfaktor, jedoch gab es andere Kristalle mit sehr viel höheren Verstärkungsfaktoren. Bei diesem Kristall beruhte die hohe Leitfähigkeit zum überwiegenden Teil auf einer hohen Stromleitung in relativ kurzer Zeit, wie unsere Einzelimpulsmessungen an ihm eindeutig bewiesen (siehe Versuche unter IIIb).

Die bisherigen Überlegungen lassen zwar verstehen, daß gut leuchtende Kristalle auch gut leiten können. Es liegt aber keine Erklärung dafür vor, warum nur die gut leuchtenden Kristalle auch gut leiten. Zunächst müßte dazu natürlich erst noch genauer festgestellt werden, ob wirklich alle schlecht leuchtenden Kristalle auch schlecht leiten, oder ob es nicht doch einige wenige schlecht leuchtende Kristalle mit guter Leitfähigkeit gibt, und ob diese schlechte Leitfähigkeit wirklich nur darauf beruht, daß diese Kristalle nicht aktiviert sind bzw. nur sehr wenig Aktivatoratome enthalten. Träfe dies zu, so könnte man eine Erklärung in dem Umstand sehen, daß in dem Kristall durch die Aktivatoratome vermutlich erst die Lokalisierung der Löcher und die „langlebigen“ Elektronen erzeugt werden. Da nun gerade die langlebigen Elektronen in den meisten Fällen für die große Leitfähigkeit verantwortlich sind, so wäre auf diese Weise eine Beziehung zwischen Leitvermögen und Emissionsvermögen zu verstehen.

Zusammenfassend läßt sich über die Leitfähigkeit folgendes sagen: Im allgemeinen wird die Leitfähigkeit mit hohem Verstärkungsfaktor durch langlebige Elektronen hervorgerufen, und nur in wenigen Fällen tritt auch schon in einer Zeit von der Größenordnung der Leuchtdauer die Ausbildung des Leitfähigkeitsbandes auf. Nach diesen Überlegungen versteht man, warum gut leuchtende Kristalle auch gut leiten können.

Nun müssen wir noch die Wirkung der Vorbestrahlung mit ultrarotem und sichtbarem Licht besprechen. Der Einfluß von *UR* beruht sicherlich darauf, daß die langlebigen, zur Leitfähigkeit beitragenden Elektronen wie bei der Phosphoreszenz ausgeleuchtet werden. Obwohl der durch diese langlebigen Elektronen verursachte Ruhestrom verschwindend klein gegen den durch nachfolgende  $\alpha$ -Strahlen- oder Elektronen-Erregung hervorgerufenen Strom ist, muß er doch zur Ausbildung des Stromes vorhanden sein, wie die Versuche mit  $\alpha$ -Bestrahlung unter *IIe* und *IIId* ganz deutlich zeigen. Ohne einen genügend hohen Ruhestrom setzt der durch  $\alpha$ -Teilchen erregte Strom überhaupt nicht ein. Man kann sich das vielleicht so vorstellen, daß dieser Ruhestrom erst die geeigneten Potentialverhältnisse in dem Kristall schafft, die zur Ausbildung der Leitfähigkeitsbänder durch den ganzen Kristall hindurch notwendig sind und daß auch die Einstellung des thermischen Gleichgewichtes des Leitungsbandes mit den Elektroden erst eine gewisse Zeit braucht. Man muß ferner bedenken, daß ein solcher Kristall nicht völlig homogen ist, sondern sicherlich auch in seinem Innern Inhomogenitäten aufweist.

Nun erzeugt ein Elektron oder ein  $\alpha$ -Teilchen nur in einem sehr kleinen Bereich des Kristalls eine Erregung. Die Erregung muß aber durch den ganzen Kristall hindurchgehen, damit eine hohe Leitfähigkeit zustande kommt. Wenn Inhomogenitäten in dem Kristall vorhanden sind, so werden die schmalen Leitfähigkeits-

bänder an diesen Stellen unterbrochen. Es kann nur ein hoher Strom fließen, wenn diese Unterbrechungen möglichst gering sind. Bestand nun schon vor der Bestrahlung mit  $\alpha$ -Teilchen oder Elektronen eine möglichst homogene Erregung durch den ganzen Kristall hindurch, so werden die Inhomogenitäten der Ausbildung von neuen, stärkeren Leitungsbändern kein so großes Hindernis mehr in den Weg legen. Es werden also die von den einzelnen Teilchen gebildeten Erregungsbahnen in diesem Falle sofort zur Leitfähigkeit ausgenutzt werden können, während im anderen Falle, wenn nur an wenigen Stellen eine Leitfähigkeit vorhanden ist, diese Erregungsbahnen selbst keine durchgehenden Leitungsbrücken bilden.

Das Vorbestrahlen mit sichtbarem Licht hat dann lediglich die Wirkung, genügend viele relativ langlebige Elektronen, die einen genügenden Ruhestrom liefern, zu schaffen. Anstelle von Vorbestrahlung mit sichtbarem Licht kann man, wie unsere Versuche unter IIe zeigen, auch mit Elektronen vorbestrahlen. Dann stellt sich das Leitvermögen relativ schnell ein. Man kann aber auch sogar mit  $\alpha$ -Strahlen vorbestrahlen. Nur muß man dann die Vorbestrahlung über eine lange Zeit hin ausdehnen, um genügend viele langlebige Elektronen, d. h. einen genügend großen Ruhestrom zum Einsetzen des durch  $\alpha$ -Teilchen erregten Stromes zu erhalten.

Daß bei Elektronenerregung die Wirkung der Vorbestrahlung mit Ultrarot nicht so deutlich war, liegt daran, daß die Elektronen selbst schon eine genügende Vorerregung des Kristalls besorgen. Wenn der Kristall sehr wenig vorerregt war, dann war auch bei Elektronenbestrahlung zunächst nur ein kleiner Strom vorhanden, der aber bei andauernder Elektronenbestrahlung schnell auf seinen hohen Endwert anstieg (siehe das Ansteigen des Stromes in Abbildung 2).

Die Versuche über den Gleichrichtereffekt (IIc, IIIb) zeigten noch, daß es offenbar im wesentlichen die Elektronen des oberen Bandes sind, die sich durch den Kristall hindurchbewegen. War die Feldrichtung so gewählt, daß nur die „Löcher“ des unteren Energiebandes durch den Kristall hindurchwandern konnten, so war die Leitfähigkeit sowohl bei kontinuierlicher Bestrahlung wie bei Einzelimpulsmessungen immer sehr viel geringer. Jedoch traten auch dann bei Bestrahlung mit  $\alpha$ -Teilchen immer kleine Stromstöße auf, die kurzzeitig waren und deren Gesamtladungstransport etwa der Gesamtzahl der erregten Elektronen entsprach. Es sieht also danach so aus, als ob auch den „Löchern“, oder wenigstens einem Teil derselben, eine gewisse Beweglichkeit durch den ganzen Kristall hindurch zukommt, daß diese aber zur Ausbildung von Leitfähigkeitsbändern wenig geeignet sind; denn die Ströme, die in dieser Feldrichtung bei  $\alpha$ -Teilchen-Anregung auftraten, zeigten, wenn überhaupt, nur einen sehr geringen Verstärkungsfaktor. Wir möchten nochmals darauf hinweisen, daß es zwar möglich ist, die Verhältnisse an einem Kristall verhältnismäßig konstant zu erhalten, daß aber die Verhältnisse von Kristall zu Kristall ganz außerordentlich verschieden sind, so daß man kaum zwei Kristalle erhält, die sich auch nur annähernd ähnlich verhalten.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie  
und Elektrochemie.

(Bei der Redaktion eingegangen am 3. Mai 1948.)

reich  
mas  
fach  
stal  
Bew  
um  
stof  
Zeit  
lade

I  
zeln  
stoff  
mit  
Leuc  
ergal  
Grup  
dicht  
selbe  
Elek  
dene  
ist al  
Leuc  
hoch  
E

der S  
lich  
nur F

1)  
2)  
3)  
1948  
4)



# **Anregung von Leuchtstoffen durch die energiereichen Kerntrümmer der Uranspaltung**

Von I. Broser und H. Kallmann

(Mit 3 Abbildungen)

## **Inhaltsübersicht**

Es wird die Anregung von Leuchtstoffen durch einzelne hochgeladene energiereiche Teilchen, die bei der Uranspaltung ausgesandt werden, mit Hilfe des Leucht-massenzählers (bestehend aus Leuchtstoffschild und Sekundär-Elektronenvervielfacher) untersucht. Der Nachweis schwerer Kerntrümmer mit dieser Methode gestaltet sich, auch bei Gegenwart einer starken  $\gamma$ -Strahlung, sehr einfach. Der Beweis, daß es sich bei den beobachteten Lichtblitzen großer Intensität tatsächlich um Urantrümmer handelt, wird auf verschiedene Weise geführt. Für die Leuchtstoffphysik ergibt sich aus den Messungen die absolute Energieausbeute und die Zeitdauer der Lichtblitze für ZnS—Ag bei Anregung durch einzelne schwere geladene Kerne.

## **I. Einleitung**

In unseren letzten Arbeiten<sup>1) 2) 3) 4)</sup> haben wir gezeigt, daß der Nachweis einzelner  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen,  $\gamma$ -Quanten und Höhenstrahlen mit Hilfe von Leuchtstoffen möglich ist. Die Lichtwirkung derartiger Strahlen in Leuchtstoffen wurde mit einem Sekundär-Elektronenvervielfacher registriert und aus der Intensität des Leuchtens Rückschlüsse auf die Energie der erregenden Strahlung gezogen. Dabei ergab sich, daß man die von uns untersuchten Leuchtstoffe ganz grob in zwei Gruppen einteilen kann: Erstens solche, die für Strahlen mit großer Erregungsdichte ( $\alpha$ -Teilchen, langsame Elektronen und Röntgenstrahlen) bessere oder dieselbe Energieausbeute wie für Strahlen mit geringer Erregungsdichte (schnelle Elektronen,  $\gamma$ -Quanten und Höhenstrahlteilchen) zeigen und zweitens solche, bei denen die Energieausbeute für stark ionisierende Teilchen wesentlich schlechter ist als für schwach ionisierende Strahlen. Zu den ersteren gehören besonders die Leuchtstoffe der Zinksulfidgruppe, bei denen auch die Absolutausbeute besonders hoch ist.

Eine noch wesentlich größere Erregungsdichte als  $\alpha$ -Teilchen besitzen die bei der Spaltung des Urans entstehenden schweren geladenen Kerne. Denn bekanntlich besitzen derartige Kernbruchstücke Energien von 60—90 MeV, haben aber nur Reichweiten in Luft bei Normalbedingungen von 1—2 cm. Der Nachweis von

<sup>1)</sup> I. Broser u. H. Kallmann, Z. Naturforsch. 2a, 439—440 (1947).

<sup>2)</sup> I. Broser u. H. Kallmann, Z. Naturforsch. 2a, 642 (1947).

<sup>3)</sup> I. Broser, L. Herforth, H. Kallmann u. U. Martius, Z. Naturforsch. 3a, 6 (1948).

<sup>4)</sup> I. Broser u. H. Kallmann, Ann. Physik (z. Zt. im Druck).

solchen Teilchen mit Hilfe von Leuchtstoffen dürfte also besonders gut mit Zinksulfid möglich sein. Man kann dann erwarten, daß die durch Kernbruchstücke im Leuchtstoff erzeugten Lichtblitze wesentlich größer sind als die durch  $\alpha$ -Teilchen verursachten Szintillationen.

Im folgenden wird gezeigt, daß in der Tat die durch die Spaltstücke des Urans in ZnS—Ag als Leuchtstoff erzeugten Lichtblitze trotz einer sehr starken  $\gamma$ -Strahlung des benutzten Neutronenpräparates bequem zu messen sind.

## II. Meßanordnung

Die von uns benutzte Anordnung zum Nachweis der durch Kernbruchstücke hervorgerufenen Lichtblitze war ähnlich unserer früheren außerordentlich einfach (Abb. 1). Auf dem Fenster eines Netzsekundär-Elektronenvervielfachers befand sich eine etwa 2 mm dicke Glasplatte, auf der eine dünne Schicht von ZnS—Ag

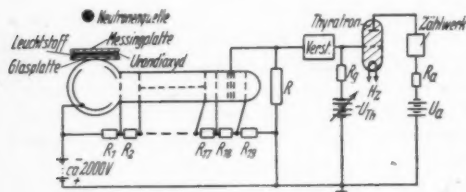


Abb. 1. Meßanordnung

Radium—Beryllium-Äquivalent-Stärke angebracht werden. Die durch die Kernbruchstücke, aber auch die durch die  $\alpha$ -Teilchen des Urans erzeugten Lichtblitze gelangten in das Fenster des Vervielfachers und lösten dort auf der photoempfindlichen Schicht eine der Lichtintensität proportionale Elektronenzahl aus. Nach Verstärkung im Vervielfachersystem und einem dreistufigen Verstärker gelangte der Impuls an das Gitter eines Thyratrons, welches nur zündete und ein Zählwerk zum Ansprechen brachte, wenn die Spannungsamplitude des Impulses größer war als die regelbare Gittervorspannung. So wurde in bekannter Weise die Impulsgröße und damit auch ein Maß für die Intensität der Lichtblitze festgestellt. Zur direkten Beobachtung der Impulse konnte an dem Vervielfacherausgang auch ein Elektronenstrahl-Oscillograph angeschlossen werden, mit dem sich Form und Dauer des Vorganges analysieren ließen.

Das zur Messung benutzte Neutronenpräparat strahlte ca.  $3 \cdot 10^5$  schnelle Neutronen pro sec nach allen Seiten aus. Von diesen gelangte etwa der zehnte Teil auf die Uranschicht, deren wirksame Fläche etwa  $3 \text{ cm}^2$  betrug, und lösten dort den Spaltprozeß mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit an den vorhandenen  $\text{U}^{238}$  aus. Wegen ihrer geringen Reichweite gelangten nur solche Kernbruchstücke auf den Leuchtstoff und regten diesen zum Leuchten an, die in einer kleineren Schichtdicke als etwa  $1 \text{ mg/cm}^2$  von der Oberfläche an gerechnet im Urandioxyd erzeugt wurden. Mithin war für die Reaktion nur eine Schichtdicke von etwa  $3 \text{ mg}$  wirksam. Wie man leicht errechnet, befinden sich in einer derartigen Schicht  $7,5 \cdot 10^{18} \text{ U}^{238}$  Atome. Für den Spaltungsprozeß mit schnellen Neutronen besitzen diese einen Wirkungsquerschnitt von ca.  $0,5 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  <sup>5)</sup>. Daraus errechnet sich

<sup>5)</sup> K. Diebner, W. Hermann u. E. Grassmann, Physik. Z. **43**, 440 (1942).

die Wahrscheinlichkeit, mit der die  $3 \cdot 10^4$  Neutronen den Spaltungsprozeß erzeugen, zu etwa 0,1, d. h. alle 10 sec sollte ein durch ein Spaltstück erzeugter Lichtblitz zu beobachten sein.

### III. Meßergebnisse

Es war von vornherein zu erwarten, daß die sehr energiereichen Kernbruchstücke wesentlich größere Lichtblitze erzeugen würden als die  $\alpha$ -Teilchen, obwohl nicht anzunehmen war, daß die Lichtausbeute bei beiden Teilchenarten dieselbe sein würde. Man sollte also die U-Lichtblitze von den  $\alpha$ -Lichtblitzen durch ihre Größe mit unserer Meßanordnung trennen können. Wegen der sehr verschiedenen Energien, mit der die aus verschiedenen Urantiefen austretenden Teilchen auf den Leuchtstoff trafen, mußten auch die U-Lichtblitze in ihrer Intensität sich stark voneinander unterscheiden. Nur die hellsten Lichtblitze konnten als Maß für die Größe der Energieumsetzung dienen.

Unsere Messungen sind in Abb. 2 wiedergegeben. Kurve I zeigt die Zahl der mit dem Zählwerk in 1 Stunde registrierten Impulse in Abhängigkeit von der an das Thyatron gelegten Sperrspannung, wobei ohne Neutronenpräparat gemessen wurde. Im wesentlichen rühren diese Impulse von den Lichtblitzen der Uran- $\alpha$ -Teilchen her. Geht man zu kleinen Werten der Sperrspannung über, so vergrößert sich — wie hier nicht mehr eingezeichnet ist — die Zahl der Impulse außerordentlich: Der ohne Kühlung des Vervielfachers relativ starke Wärmestörpegel wird dann bereits mitgezählt. Man erkennt, daß schon bei  $-13$  Volt Thyatronsperrspannung kein Impuls mehr gezählt wird, d. h. Lichtblitze, die nach Verstärkung größere Spannungsimpulse als 13 Volt am Thyatron geben, treten nicht auf. Nunmehr wurde das Neutronenpräparat im Abstand von einigen mm an die Uranschicht gebracht. Die dadurch hervorgerufene zusätzliche Impulszahl ist aus der Kurve II der Abb. 2 ersichtlich: Die größten Impulse erreichen jetzt etwa 35 Volt, sind also etwa dreimal so groß wie die größten durch  $\alpha$ -Teilchen hervorgerufenen Spannungsimpulse. Wie erwartet, nimmt die Zahl der Lichtblitze mit wachsender Impulsgröße stark ab: Nur einige wenige Lichtimpulse haben maximale Größe. Dagegen treten bei  $-10$  Volt Sperrspannung bereits ca. 200 zusätzliche Impulse auf, eine Zahl, die sich für kleinere Sperrspannung noch wesentlich erhöhen dürfte. Wie man sieht, stimmen diese Meßwerte mit den oben errechneten Werten von einem schweren Teilchen in 10 sec, d. h. 360/Std., sehr gut überein. Die Energieausbeute für schwere Kerne im ZnS ergibt sich aus den Messungen als wesentlich kleiner als für  $\alpha$ -Teilchen. Denn, obwohl die Energie der Kerntrümmer bei den hellsten Lichtblitzen etwa 20mal so groß ist wie bei den  $\alpha$ -Teilchen des Urans, ist der Helligkeitsunterschied, wie gesagt, nur ein Faktor 3. Die Ausbeute ist also 7mal schlechter für Kerntrümmer als für  $\alpha$ -Teilchen. Da die Absolutausbeute für  $\alpha$ -Teilchen in ZnS—Ag — nach unseren neuesten Messungen \*) — etwa 25% beträgt, dürfte die absolute Ausbeute für schwere geladene Kerne in der Größe von 3% liegen.

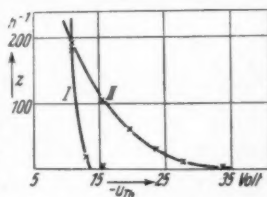


Abb. 2. Intensitätsverteilung der durch Teilchen (I) und durch schwere geladene Kerne (II) verursachten Lichtblitze

\*) I. Broser, H. Kallmann u. U. Martius, Ann. Physik (z. Z. in Vorbereitung).

Wir haben auch noch Untersuchungen über die Form und die Zeitdauer der durch Kernbruchstücke verursachten Lichtblitze angestellt, indem wir den Impuls auf einem Oscillographenschirm analysierten. Es zeigte sich, daß hier kein wesentlicher Unterschied gegenüber den  $\alpha$ -Szintillationen auftritt. Die Dauer eines Lichtblitzes betrug einige  $10^{-6}$  sec, und die Form der Abklingkurve war sehr stark gezackt, wie das schon für  $\alpha$ -Teilchen beschrieben worden ist<sup>3)</sup>.

Nach dem bisher Gesagten dürfte es sich bei den Teilchen, die die hellen Lichtblitze erzeugen, zweifelsohne um Urantrümmer handeln. Wir haben jedoch weitere Untersuchungen angestellt, um diese Annahme noch mehr zu festigen, insbesondere um nachzuweisen, daß nicht das Vorhandensein des Neutronenpräparates allein, welches gleichzeitig eine starke  $\gamma$ -Strahlung aussandte, die Ursache für die großen zusätzlichen Impulse war, sondern daß derartige Impulse nur bei Anwesenheit von Uran auftreten. Zum anderen haben wir die Reichweite der diese Lichtblitze erzeugenden Teilchen bestimmt und beste Übereinstimmung mit der bekannten Reichweite der Kerntrümmer gefunden.

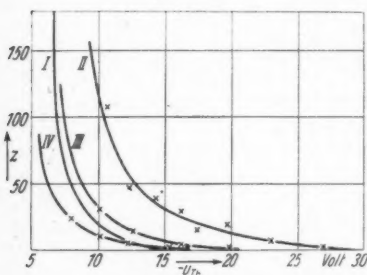


Abb. 3. Zur Bestimmung der Reichweite der schweren geladenen Kerne

Kurve I in Abb. 2, und zum anderen die Zunahme der Impulse ohne Uran, aber mit Neutronenpräparat, gegenüber der Anordnung ohne Uran und ohne Neutronenpräparat festgestellt. Wir konnten uns überzeugen, daß tatsächlich eine gewisse Vergrößerung der Impulszahl infolge der Anwesenheit des Präparates auch ohne Uran auftrat. Ob dies wegen der direkten Einwirkung der  $\gamma$ -Strahlung auf den Vervielfacher oder dadurch hervorgerufen wurde, daß im ZnS ein Kernprozeß stattfand (z. B.  ${}^{66}_{30}\text{Zn} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{63}_{28}\text{Ni} + {}^4_2\alpha$ ), konnte vorerst nicht entschieden werden, soll aber bei uns noch näher untersucht werden. Jedenfalls war die Vergrößerung des Nulleffektes außerordentlich klein gegenüber der Wirkung des untersuchten Spaltprozesses: Bereits bei 15 Volt Stoßgröße traten auch hier keine Impulse mehr auf. In Abb. 3 haben wir die Wirkung der Uran- $\alpha$ -Teilchen und die nur durch Anwesenheit des Neutronenpräparates im Leuchtstoff hervorgerufenen Impulse addiert und als Nullkurve eingetragen (Kurve I). Eine derartige Stoßzahlkurve ergäbe sich, wenn keine Spaltprozesse auftreten würden. In Wirklichkeit ergab sich bei Anwesenheit des Neutronenpräparates und der Uranschicht eine zusätzliche Stoßzahlverteilung entsprechend der Kurve II der Abb. 3. Gegenüber der Kurve II in Abb. 2 erkennt man eine gewisse Verringerung der Impulszahl, was auf den größeren Abstand  $\text{UO}_2$ -ZnS zurückzuführen ist. In einer weiteren Meßreihe wurde bei sonst gleichen Bedingungen eine Papierfolie von  $1 \text{ mg/cm}^2$  Massenbelegung zwischen Uran- und Leuchtstoffschicht gebracht und dadurch eine Abbremsung der Spaltstücke herbeigeführt (Kurve III). Man sieht deutlich, daß

schon ein ganz wesentlicher Bruchteil der Urantrümmer durch diese Maßnahme verschwindet, d. h. diese Teilchen haben sicher eine sehr kurze Reichweite. Schließlich wurde dieselbe Messung noch mit einer Folie von  $2 \text{ mg/cm}^2$  Dicke wiederholt. Es ist dann schon zu beachten, daß durch eine derartige Folie auch die  $\alpha$ -Teilchen merklich geschwächt werden, so daß also die Kurve I nicht mehr die richtige Nullkurve darstellt. In der Tat lagen auch die Stoßzahlen der Kurve IV schon unterhalb der Kurve I, und zwar derart — wie durch eine hier nicht wiedergegebene Kontrollmessung festgestellt wurde —, daß praktisch kein Anteil der Kernbruchstücke an den Lichtblitzen mehr zu verzeichnen war. Damit ist gezeigt, daß es sich tatsächlich um Teilchen mit einer Reichweite zwischen 1 und  $2 \text{ mg/cm}^2$ , entsprechend einer Reichweite in Luft zwischen 1 und 2 cm, wie sie die Urantrümmer besitzen, handelt.

#### IV. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die bei der Uranspaltung auftretenden Kernbruchstücke in Leuchtstoffen wesentlich größere Lichtblitze erzeugen als  $\alpha$ -Teilchen. Der Schluß, daß es sich tatsächlich um schwere geladene Kerne handelt, stützt sich auf folgende experimentelle Ergebnisse: Einmal stimmt die Zahl der registrierten Teilchen mit der Zahl der auf Grund des Wirkungsquerschnittes berechneten Spaltprozesse gut überein. Zweitens sind die meisten durch die Kernstücke erzeugten Lichtblitze wesentlich größer als die von  $\alpha$ -Teilchen des Urans herrührenden Szintillationen, entsprechend der sehr großen kinetischen Energie der schweren Kerne. Schließlich konnte festgestellt werden, daß die Reichweite der die Lichtblitze erzeugenden Teilchen etwa zwischen 1 und 2 cm in Normalluft liegt, wie dies auch tatsächlich für die Spaltstücke beobachtet worden war. Diese Messung liefert eine bequeme Methode, auch in Gegenwart eines sehr starken  $\gamma$ -Strahlenpräparates einzelne schwere Kerntrümmer nachzuweisen. Wesentlich ist auch die Einfachheit der Anordnung, bei der die Teilchen keine Folien zu durchdringen brauchen. Auf Grund von Messungen an Leuchtstoffen mit  $\alpha$ -Teilchen<sup>4)</sup> scheint es uns — bei Verbesserung der Anordnung — absolut im Bereiche der Möglichkeit zu liegen, auch Energiebestimmungen an schweren geladenen Kernen auf Grund von Helligkeitsmessungen der Lichtblitze vorzunehmen, besonders wenn man zu diesem Zweck CdS-Einkristalle benutzt. Es ergibt sich weiter aus unseren Messungen, daß die Lichtanregung im ZnS durch die schweren geladenen Kerne mit einer etwa 7mal schlechteren Energieausbeute stattfindet als bei  $\alpha$ -Teilchen<sup>7)</sup>.

<sup>7)</sup> Herrn G. Goldbach danken wir für Mitarbeit bei der Durchführung der Messung.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für Physikalische Chemie  
und Elektrochemie.

(Bei der Redaktion eingegangen am 3. Mai 1948.)

# **Ergänzende Bemerkung zu unserer Arbeit „Allgemeine Behandlung des H-Atoms mit beliebigen Anfangsbedingungen...“<sup>1)</sup>**

Von Hartmut Kallmann und Max Päsler

Im Absatz 3 der in der Überschrift genannten Arbeit haben wir gezeigt, wie man das asymptotische Verhalten der beiden voneinander unabhängigen Lösungen des radialen Anteils der Schrödingerschen Wellengleichung für das H-Atom an einer beliebigen Stelle  $\bar{a}$  und auch im Unendlichen aus der Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung unmittelbar erhalten kann. Zu diesem Zwecke wurde an Stelle der Wellenfunktion  $R$  die Funktion  $F = \varrho^{l+1} \cdot R$  eingeführt und für diese die Differentialgleichung (3,2) erhalten. In ihr wird ferner die Variable  $\varrho$  durch  $(\bar{\varrho} + \bar{a})$  [vgl. (3,1)] ersetzt. Es wurde dann das Verhalten von  $\bar{F}(\bar{\varrho})$  untersucht. Durch Anwendung der Laplace-Transformation ergab sich für die Unterfunktion von  $\bar{F}$  die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung (3,3), deren Lösung (3,9) + (3,10) untersucht wurde. Bei Betrachtung des Spezialfalles A.  $\bar{a} = 0$  werden die im Nullpunkt verschwindenden Lösungen von  $F$  durch den homogenen Anteil (3,9) der Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung im Unterbereich dargestellt. Denjenigen Lösungen  $F$ , für die  $F(0) \neq 0$  ist (sie geben zu Funktionen  $R$  Anlaß, die für  $\varrho = 0$  nicht regulär sind), entspricht im Unterbereich die partikuläre Lösung (3,10). Die genaue Durchrechnung zeigt indessen, daß für den Spezialfall  $\bar{a} = 0$  die Lösungen mit  $F(0) \neq 0$  nicht mit Hilfe der Laplace-Transformation zu berechnen sind, da diese Lösungen von  $F$  im Nullpunkt nicht regulär sind. Man erkennt das, wenn man unsere Formel (3,10) für  $\bar{a} = 0$  nach  $\frac{1}{p}$  entwickelt. Es nimmt dann das erste Glied der Entwicklung die Form

$$\varphi_i = \frac{\bar{F}(0)}{p} + \dots \quad (1)$$

an. Wegen des in Gl. (3,10) auftretenden Integrals tritt aber bei den späteren Gliedern wegen  $\bar{a} = 0$  immer ein Anteil von der Form

$$\frac{1}{p^n} \int \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} = \frac{\ln \bar{p}}{p^n} \quad (n \text{ ganzzahlig}) \quad (2)$$

auf. Ein solches Glied in der Entwicklung bei großen  $p$  bedeutet aber nach den Regeln der Asymptotik ein nichtreguläres Verhalten der dazugehörigen Oberfunktion  $F$  im Nullpunkt. Wir können daher mit dieser Methode solche für  $\varrho = 0$  irregulären Funktionen gar nicht bestimmen, solange  $\bar{a}$  genau Null ist.

Jedoch läßt sich die Bestimmung dieser für  $\varrho = 0$  nichtregulären Lösungen bei beliebiger Annäherung an diese Stelle auch mit unserem Verfahren durchführen, wenn wir zu  $\bar{a} \neq 0$  übergehen, wie im Fall B. gezeigt wurde; denn die Lösungen für  $\bar{a} \neq 0$  stellen ja nichts anderes dar als die Fortsetzungen der Lösungen des Falles  $\bar{a} = 0$  für  $\varrho \geq \bar{a}$ . Für den Fall  $\bar{a} \neq 0$  erlaubt nämlich die Lösung (3,10) stets eine asymptotische Entwicklung nach  $\frac{1}{p}$ , und diese beginnt immer, wie die Auswertung der Gl. (3,10) zeigt, mit den Gliedern

$$\varphi_i \sim \frac{\bar{F}(0)}{\bar{p}} + \frac{\bar{F}'(0)}{\bar{p}^2} + \dots, \quad (3)$$

<sup>1)</sup> H. Kallmann u. M. Päsler, Ann. Physik (6) 2, 305 (1948).



zu welchen eine Oberfunktion

$$\bar{F}(\bar{\rho}) = \bar{F}(o) + \bar{F}'(o) \bar{\rho} + \dots \quad (4)$$

gehört. Letztere Beziehung zeigt, daß in der Tat den Konstanten  $\bar{F}(o)$  und  $\bar{F}'(o)$  die Bedeutung des Anfangswertes der Funktion  $\bar{F}(\bar{\rho})_{\bar{\rho}=0}$  bzw. ihrer Ableitung zukommen, wie ihre Werte auch immer unabhängig voneinander gewählt werden. Dieses Ergebnis ist ersichtlich die Bestätigung für die Anwendbarkeit unseres Verfahrens. Da  $\bar{F}(o)$  und  $\bar{F}'(o)$  voneinander unabhängige, willkürlich wählbare Konstanten sind, stellen also die weiteren  $\bar{F}(o)$  bzw.  $\bar{F}'(o)$  enthaltenden Glieder der Entwicklung in ihrer Gesamtheit zwei voneinander unabhängige Lösungen des Problems dar. Da  $\bar{a}$  beliebig klein ( $> 0$ ) gewählt werden kann, läßt sich dadurch auch das Verhalten der Funktion in beliebiger Nähe von  $\bar{\rho} = 0$  angeben. Für  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$  folgt aus (3,10) nach der Asymptotik (Verhalten von  $\varphi_i$  an der Stelle  $p = +\frac{1}{2}$ ) sofort, daß es für jeden Wert von  $\beta + \alpha \geq 0$  immer eine Lösung gibt, die im Unendlichen verschwindet, und eine Lösung, die im Unendlichen unendlich wird. Da nun diese Lösungen nichts anderes darstellen als die Fortsetzung der Lösungen für  $\bar{a} = 0$ , gilt das gleiche für diesen Fall. Daraus ergibt sich unmittelbar der von uns am Ende des Absatzes 3. A) der zitierten Arbeit gezogene Schluß über das Verhalten der Lösung der Schrödingerschen Wellengleichung im Nullpunkt und im Unendlichen.

Der Vorteil des von uns mitgeteilten Verfahrens besteht wesentlich darin, daß wir allein aus der Betrachtung der Gl. (3,10) und aus ihrer Entwicklung an den Stellen  $\bar{p} = +\frac{1}{2}$  und  $\bar{p} = -\frac{1}{2}$  bzw. im Unendlichen das asymptotische Verhalten der beiden voneinander unabhängigen Lösungen des Oberbereichs im Unendlichen bzw. an jeder beliebigen Stelle  $\bar{a}$  erhalten. Die Bedingung, daß bei beliebigem nicht ganzen  $\beta$  (Energiewert) die Funktion  $F$  im Unendlichen verschwindet, wird dann im allgemeinen dadurch gegeben, daß  $\bar{F}(o)$  und  $\bar{F}'(o)$  so gewählt werden, daß die Konstante, die bei der Entwicklung des Integrals

$$\int_p^\infty [\bar{a} \bar{F}(o) \bar{p} + (2\alpha + 1) \bar{F}(o) + \bar{a} \bar{F}'(o)] e^{-\bar{a} \bar{p}} \frac{(\bar{p} + \frac{1}{2})^{\beta - \alpha - 1}}{(\bar{p} - \frac{1}{2})^{\beta + \alpha + 1}} d\bar{p} \quad (5)$$

um die Stelle  $\bar{p} = +\frac{1}{2}$  auftritt, Null wird. Genügen  $\bar{F}(o)$  und  $\bar{F}'(o)$  dieser Bedingung nicht, so wird die Oberfunktion im Unendlichen unendlich; für  $\beta$  ganzzahlig müssen  $\bar{F}(o)$  und  $\bar{F}'(o)$  so gewählt werden, daß der Faktor des logarithmischen Gliedes bei einer Entwicklung um  $\bar{p} = +\frac{1}{2}$  verschwindet [siehe unsere Gl. (3,30)]. Umgekehrt kann man bei Kenntnis von  $\bar{F}(o)$  und  $\bar{F}'(o)$  durch die Bestimmung der entsprechenden Konstanten bzw. des Faktors des logarithmischen Gliedes sofort das Verhalten von  $\bar{F}$  im Unendlichen erschließen. Es sei schließlich noch bemerkt, daß nur für den Spezialfall  $\bar{a} = 0$  und  $l$  ganzzahlig die Berechnung nach unserem Verfahren nicht möglich ist. Für den Fall  $l$  nicht ganzzahlig (der physikalisch nicht interessiert) ist sogar das Verfahren auch für  $\bar{a} = 0$  durchführbar, weil dann in der Entwicklung für  $\frac{1}{p}$  an Stelle  $\int \frac{dp}{p}$  ein Integral von der Form  $\int \frac{dp}{p^s}$  mit  $s$  nicht ganzzahlig tritt, was zu keiner logarithmischen Singularität führt.

Berlin-Charlottenburg, Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität und Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.

(Bei der Redaktion eingegangen am 26. Juni 1948.)

# Durch Hochfrequenzimpulse angeregte mechanische Schwingungen von Quecksilberkapillaren

Von Hansgeorg Laporte

(Mit 6 Abbildungen)

## Inhaltsübersicht

Es wird gezeigt, wie durch einen elektromagnetischen Schwingungsimpuls ein Quecksilberfaden in einer Kapillare zu mechanischen Schwingungen angeregt werden kann. Die Schwingungen wurden mit Zeitlupenaufnahmen und Funkenphotographien fixiert. Sie werden hauptsächlich durch elektrodynamische Stromwirkung mit Verzögerung angeregt. Die thermische Stromwirkung ist gering und abhängig von der Dauer des elektrischen Impulses.

Bei Arbeiten zur Entwicklung eines Leistungsmessers zur Messung des Energieinhaltes einer einzelnen gedämpften Hochfrequenzschwingung wurde vom Verfasser u. a. im Jahre 1943 im Elektrophysikalischen Laboratorium der Rheinmetall-

Borsig-A.G. versucht, die Wärmespeicherung in Quecksilberkapillaren hierfür heranzuziehen. Hierbei wurde bei Messung der Ausdehnung des Quecksilberfadens unter dem Mikroskop beobachtet, daß durch einzelne gedämpfte, hochfrequente Schwingungen von 1000 bis 50000 Hertz der Faden einen plötzlichen, sehr kurz-

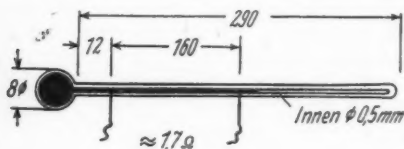


Abb. 1

zeitigen, pendelnden Ausschlag zeigte. Eine Analyse dieses Schwingungsvorganges konnte erst 1948 mit größeren Impulsen durchgeführt werden, da die 1943 benutzten hochfrequenten Energien in der Größenordnung von nur  $1 \cdot 10^{-3}$  Wattsekunden lagen und damals die Zeit hierfür fehlte.

Die Quecksilberkapillare (Abb. 1) besteht aus einem thermometerähnlichen Glasgefäß, in dem in 16 cm Abstand zwei Platindrähte zur Stromzuführung zum Quecksilberfaden eingeschmolzen sind. Die Quecksilberstrecke zwischen den Stromzuführungen bildet also einen Quecksilberwiderstand  $R$  von etwa 1,7 Ohm. Schaltet man diesen in einen, aus einer Kapazität  $C$  und einer Selbstinduktion  $L$  bestehenden Schwingungskreis (Abb. 2) und entlädt den vorher aus einer Batterie aufgeladenen Kondensator mittels einer Taste  $T$ , so entsteht in dem Kreis eine einzelne, gedämpfte, elektromagnetische Schwingung, deren Energie in dem Quecksilberwiderstand  $R$  in Wärme umgesetzt wird.

Es ist nun die Frage zu entscheiden, ob nur der Wärmeimpuls, der nur dem Quecksilberfaden zugeführt wird, zu einer plötzlichen Ausdehnung der Queck-

silbersäule führt, bevor die Wärmemenge durch Leitung dem übrigen Quecksilber in der Kugel mitgeteilt werden kann, oder ob die Ausdehnung durch Einschnürung des Quecksilberfadens infolge elektrodynamischer Kräfte des vom Stromimpuls erzeugten Magnetfeldes herrührt, wie es für Gleichstrom von H. Davy<sup>1)</sup> und E. F. Northrup<sup>2)</sup> festgestellt wurde.

Um die mechanischen Schwingungen zu analysieren, wurden diese daher mit einer Schmalfilm-Zeitlupenkamera mit Bildfolgen von etwa 300 bis 600 Bilder/sec aufgenommen, wobei Lichtmarken eines 1000-Hz-Stimmgabelgenerators als Zeitmarken dienten. Die Ausmessung der Einzelbilder erfolgte mittels Meßmikroskop. Die Ausmessung war oft schwierig, da manchmal einzelne Bilder in einer Reihe ungleichmäßig entwickelt waren und auch das Korn der Aufnahme störte. Die Ausmessungsgenauigkeit betrug daher  $\pm 5\%$  (1 Teilstrich der Okularteilung). Aus den Meßwerten von 4 Aufnahmen wurden die Kurven der Abb. 3 gezeichnet, die nur aus Meßpunkten bestehen und die in Anbetracht der Schwierigkeit der Aufnahmen und Ausmessung eine befriedigende Übereinstimmung zeigen.

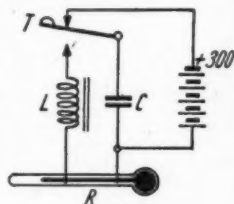


Abb. 2

Zur einwandfreien ausmeßbaren Aufnahme mußte durch Steigerung der elektrischen Energie eine möglichst große Ausdehnung des Quecksilberfadens erzielt werden. Mit Kondensatoren von 8 bis  $40\mu\text{F}$ , eisenhaltigen Induktionsspulen von 0,01 bis 1 H und Ladespannungen von 200 bis 300 V kann man Fadenausschläge von einigen Zentimetern erhalten, die ohne Mikroskop sichtbar sind. Bei diesen reißt oft bei sehr großen Amplituden die Säule innen ab, nachdem der Stromimpuls längst abgeklungen ist, und es entstehen anscheinend durch Ladungstrennung im Innern der Kapillare Funken, deren Licht sogar für photographische Aufnahmen ausreicht. Manchmal treten die Funken auch in der Kapillare zwischen Quecksilberkugel und der unteren Stromzuführung auf, wie Zeitlupenaufnahmen zeigen.

Die Abreißvorgänge weisen auf elektrodynamische Auslösung der Schwingungen hin. Es konnte jedoch bei den Filmaufnahmen, bei denen kein Abreißen der Queck-

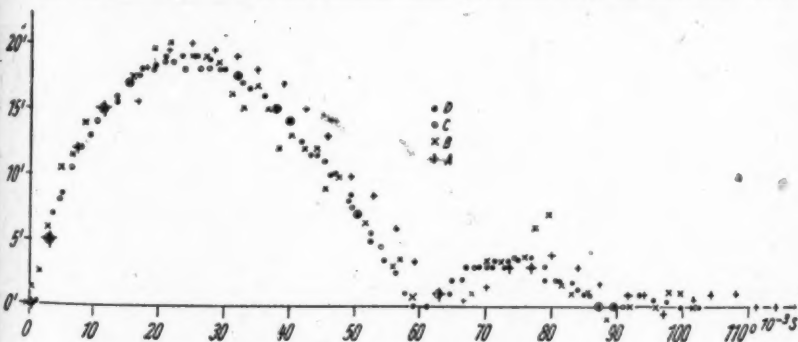


Abb. 3

<sup>1)</sup> H. Davy, Philos. Trans. Roy. Soc. London 1823, II, S. 153.

<sup>2)</sup> E. F. Northrup, Physic. Rev. 24, 474 (1907). Siehe auch: Handbuch der Experimentalphysik Bd. 11, 1. Teil S. 123, 1932.

silbersäule bei großen Amplituden auftrat, bei der mikroskopischen Ausmessung der Einzelbilder kein Einschnüren des Quecksilbers und Loslösung von der Wand der Kapillare beobachtet werden.

Aus den Zeitlupenaufnahmen konnte nicht festgestellt werden, mit welcher Verzögerung die mechanische gedämpfte Schwingung der Säule nach dem zugeführten elektromagnetischen Impuls einsetzt. Es wurde daher die Schwingung mittels Funkenphotographie durch eine rotierende Trommelkamera aufgenommen (Abb. 4). Hierbei wurde die Quecksilberkapillare intermittierend durch eine Magnesiumfunkenstrecke beleuchtet, die von einer Mittelfrequenzspannung von etwa 500 Hz gespeist wurde. Die genaue Funkenfrequenz wurde mittels Frequenzmessers kontrolliert. Die Funkenzahl und damit die Anzahl der Aufnahmen je Sekunde lagen zwischen 900 und 1000. Die Quecksilberkapillare wurde direkt auf den Leuchtschirm eines Kathodenstrahlrohres montiert, dessen Ablenkplatten parallel zur Selbstinduktion  $L$  des Schwingungskreises geschaltet waren. Es war so eine gleichzeitige Photographie der elektrischen und mechanischen Schwingung möglich. Da der Quecksilberfaden nur wenig Licht reflektierte, mußte die Optik hierauf scharf eingestellt werden. Aus diesem Grunde ist die Aufnahme des Kathodenstrahles auf der Abb. 5 etwas unscharf.

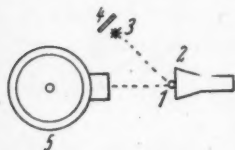


Abb. 4. Aufbau für Funkenphotographie

- 1 Quecksilbersäule
- 2 Kathodenstrahlrohr
- 3 Funkenstrecke
- 4 Spiegel
- 5 Trommelkamera

Aus dieser Reihenphotographie sieht man, daß die mechanische Schwingung erst 5 Millisekunden nach dem Beginn der elektromagnetischen Schwingung einsetzt, zu einem Zeitpunkt, wo diese schon abgeklungen ist. (Auf der Aufnahme Abb. 5 schwingt mit der Quecksilbersäule ein einzelnes abgerissenes Tröpfchen.)

Der Vergleich beider Aufnahmeverfahren ergibt:

Schwingungsdauer der	Zeitlupenaufnahmen bei $C = 8 \mu\text{F}$	Funkenaufnahmen bei $C = 40 \mu\text{F}$
1. Schwingung	59 ms	50 ms
2. Schwingung	30 ms	29 ms
3. Schwingung	ca. 11 ms (unbestimmt)	14 ms

Die mechanische Schwingungsdauer stimmt annähernd überein. Bei größeren Amplituden, die durch die größere Ladekapazität bedingt sind, ist die Schwingungsdauer erwartungsgemäß kürzer.

Die maximale Ausdehnungsgeschwindigkeit der Quecksilbersäule beträgt 88,4 cm/s.

Aus den bekannten elektrischen Kreisdaten, den Abmessungen der Kapillare, der Masse des Quecksilberfadens und den Auswertungen der Aufnahmen wurde versucht, einwandfreie meßwertgenaue Zusammenhänge zwischen den beobachteten mechanischen Wirkungen und vermuteten elektrodynamischen und thermischen Größen zu finden. Diese Arbeit ist bisher erfolglos geblieben. Es läßt sich nur sagen, daß durch den elektrodynamischen Effekt die mechanische Schwingung mit einer Verzögerung nach Ablauf der elektromagnetischen Schwingung analog der Schwingung eines ballistischen Galvanometers einsetzt.

ng  
nd

er  
e-  
ng  
en  
ne  
on  
z-  
je  
kt  
en  
ea  
ge  
a-  
er-  
ik  
de  
5

ie  
ch  
n-  
en  
er  
(.)

en  
n-  
e-  
e,  
le  
en  
n  
ir  
g  
g







Abb. 5

Zur Feststellung der Größenordnung der thermischen im Vergleich zur dynamischen Ausdehnung wurde durch eine Kapillare Gleichstrom verschiedener Stärke jeweils 1 Sekunde lang geschickt und der Ausschlag des Quecksilberfadens mit dem Meßmikroskop bestimmt. Bei Stromschluß erfolgte eine momentane Ausdehnung, die eine elektrodynamische und eine thermische Ursache hatte. Bei Stromöffnung blieb eine Restausdehnung erhalten, die rein thermisch bedingt war. Auf diese Weise konnten beide Wirkungen getrennt werden (Abb. 6). Da die thermische Ausdehnung im Gegensatz zur dynamischen Aus-

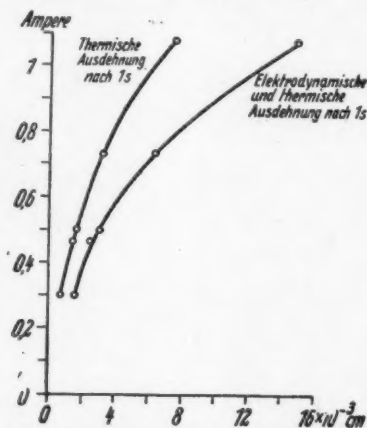


Abb. 6. Ausdehnung des Quecksilberfadens bei Gleichstrom  $t = 1 \text{ s}$

dehnung proportional der Zeit ist, kann man das Verhältnis beider bei einer Zeit von etwa 3 ms (entsprechend der Stromdauer der elektrischen Schwingung in Abb. 5) bestimmen. Bei 1 Sekunde Stromdauer betrug im Mittel die thermische Ausdehnung 102% der elektrodynamischen. Für eine Zeit von 3 ms ergibt sich daher ein Verhältnis von 3% der thermischen zur elektrodynamischen Ausdehnung.

Scheibenberg/Erzgeb., Elektrophysikalischer Apparatebau.

(Bei der Redaktion eingegangen am 20. Mai 1948.)

#### Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74

für den Verlag: Hofrat Dr. Arthur Meiner, Leipzig C 1, Salomonstraße 18 B

für den Anzeigenteil: Kurt Klümmer (Arbeitsgemeinschaft medizinischer Verlage G. m. b. H.), Berlin SW 68, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 42 30 97

(1) Paul Dünhaupt, Köthen L 196

Lizenz-Nr. 410 / G. N. 400

ich  
ver-  
eck-  
eine  
Ur-  
her-  
den  
Aus-

Zeit  
g in  
sche  
sich  
hen

eg 74

N. 46